

تم تحميل وعرض المادة من

# منهجي

mnhaji.com



موقع منهجي منصة تعليمية توفر كل ما يحتاجه المعلم  
والطالب من حلول الكتب الدراسية وشرح للدروس  
بأسلوب مبسط لكافة المراحل التعليمية وتوزيع  
المناهج وتحضير وملخصات ونماذج اختبارات وأوراق  
عمل جاهزة للطباعة والتحميل بشكل مجاني

حمل تطبيق منهجي ليصلك كل جديد



# ملخص

## مادة الرياضيات 2

التعليم الثانوي - نظام المسارات  
السنة الثانية

### الفصل الدراسي الثالث

إعداد /

موقع منهجي   
mnhaji.com

ملخص دروس

الفصل السابع

الاحتمالات





## 2 - 3 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



المهارات السابقة	استعمال مبدأ العد الأساسي .
المفردات	أستعمل التباديل في حساب الاحتمال استعمل التوافيق في حساب الاحتمال
المهارات الأساسية	المضروب - التباديل - التباديل الدائرية - التوافيق

**التبديل** : هو تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهماً.

**المضروب** : يكتب مضروب العدد الصحيح الموجب  $n$  على صورة  $n!$  ويساوي حاصل ضرب جميع

الاعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي  $n$

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

وقد اتفق على ان

$$0! = 1$$

**مثال : اوجد مضروب 5 .**

$$\text{الحل : } 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

**التباديل**: يرمز الى عدد التباديل  $n$  من العناصر المختلفة مأخوذة  $r$  في كل مرة بالرمز  ${}_n P_r$  حيث

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**مثال : عدد تباديل 6 عناصر مأخوذ 4 منها في كل مرة يساوي :**

$${}_6 P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

**التباديل مع التكرار**: عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها  $n$  عندما يتكرر عنصر منها  $r_1$  من

المرات وأخر  $r_2$  من المرات وهكذا .. فإنه يساوي

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot r_3! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

**مثال: ما احتمال أن يكون عدد مكون من الارقام السبعة الآتية: 7,7,7,3,3,6,5 هو 6573737**

$$\text{عدد التباديل : } \frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{210}{2} = 105$$

$$\frac{1}{105} : \text{الاحتمال}$$

## التباديل الدائرية:

1- عدد التباديل المختلفة لـ  $n$  من العناصر مرتبة على دائرة ( بدون نقطة مرجعية ) يساوي:

$$\frac{n!}{n} = \frac{\cancel{n} \cdot (n-1)!}{\cancel{n}} = (n-1)!$$

2- عدد التباديل المختلفة لـ  $n$  من العناصر مرتبة على دائرة ( مع نقطة مرجعية ) يساوي :  
 $n!$

**مثال : بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة ؟**

**الحل :** لا توجد نقطة مرجع ثابتة إذن التباديل دائرية

$$(4-1)! = 3! = 6$$

أي يوجد 6 طرق لجلوس 4 أشخاص حول منضدة مستديرة .

**مثال : يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة . إذا كان في دائرة سامي 7**

**مقاعد ، فما احتمال أن يكون مقعد سامي الاقرب الى الباب ؟**

**الحل :** نقطة مرجعية: الاقرب الى الباب يعني انه تبديل خطي ، عدد التباديل يساوي 7!

$$\frac{6!}{7!} = \frac{\cancel{6!}}{7 \cdot \cancel{6!}} = \frac{1}{7} \quad \text{احتمال جلوس سامي الاقرب الى الباب :}$$

**التوافيق:** هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم يرمز الى عدد

توافيق  $n$  من العناصر المختلفة مأخوذة  $r$  في كل مرة بالرمز  ${}_n C_r$  حيث

$${}_n C_r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

**مثال: عدد توافيق 9 عناصر مأخوذة 6 في كل مرة يساوي :**

$${}_9 C_6 = \frac{9!}{6! \cdot (9-6)!} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 3!} = \frac{504}{6} = 84$$



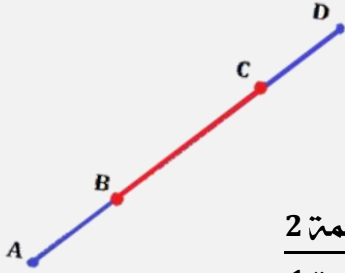


### 3 - 3 الاحتمال الهندسي



المهارات السابقة	إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة
المفردات	إيجاد الاحتمالات باستعمال الأطوال . أجد الاحتمالات باستعمال المساحات
المهارات الأساسية	<b>الاحتمال الهندسي</b> : هو احتمال يتضمن قياسا هندسيا مثل الطول او المساحة

#### الاحتمال والاطوال



إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)  
واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيا

فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) **يساوي** :  

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة 2}}{\text{طول القطعة المستقيمة 1}}$$

مثال : إذا اختيرت النقطة  $E$  عشوائيا على  $\overline{AD}$  فإن :  $P(E \in \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$

مثال : اختيرت نقطة  $A$  عشوائيا على  $\overline{BE}$  في الشكل أدناه . اوجد المطلوب فيما يلي

$P(A \in \overline{CD})$   $P(A \in \overline{BD})$

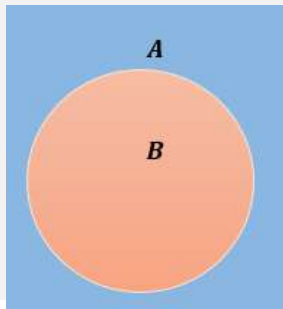
$$P(A \in \overline{CD}) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{12}{5 + 12 + 9}$$

$$= \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

$$P(A \in \overline{BD}) = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{5 + 12}{5 + 12 + 9}$$

$$= \frac{17}{26}$$

#### الاحتمال والمساحة



إذا احتوت المنطقة  $A$  منطقة أخرى  $B$

واختيرت النقطة  $E$  من المنطقة  $A$  عشوائيا

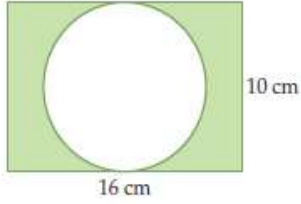
فإن احتمال أن تقع النقطة  $E$  في المنطقة  $B$  يساوي  

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$

مثال إذا اختيرت النقطة  $E$  عشوائيا في المستطيل  $A$  فإن :

$$P(\text{وقوع النقطة } E \text{ في الدائرة } B) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$$

مثال إذا اختيرت نقطة عشوائيا داخل المستطيل في الشكل أدناه ، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟



$$r^2 \pi = 25\pi \text{ cm}^2 \text{ مساحة الدائرة}$$

$$l w = 10.16 = 160 \text{ cm}^2 \text{ مساحة المستطيل}$$

مساحة المنطقة المظللة = مساحة المستطيل - مساحة الدائرة

$$\begin{aligned} & \text{مساحة المنطقة المظللة} \\ & = 160 - 25\pi = 81.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{وقوع النقطة في المنطقة المظللة}) &= \frac{\text{المظللة المنطقة مساحة}}{\text{مساحة المستطيل}} \\ &= \frac{81.5 \text{ cm}^2}{160 \text{ cm}^2} \approx 51\% \end{aligned}$$

### الاحتمال الهندسي والقطاع الدائري

نسبة مساحة قطاع في دائرة الى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية  $(x^\circ)$  الى  $360^\circ$  وعليه اذا اختيرت نقطة عشوائيا داخل الدائرة فإن احتمال وقوعها داخل القطاع على يساوي  $\frac{x}{360}$

مثال : استخدم القرص ذا المؤشر الدوار كما بالشكل المجاور لايجاد كل مما يلي

احتمال استقرار المؤشر على اللون الاخضر



$$\frac{x}{360} = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = 25\%$$

احتمال عدم استقرار المؤشر على اللون الاصفر:

$$\frac{360-45}{360} = \frac{315}{360} = \frac{7}{8} = 87.5 \%$$





## 3 - 4 احتمالات الحوادث المستقلة و الحوادث غير المستقلة



المهارات السابقة	حساب الاحتمالات البسيطة
المفردات	أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة . أجد احتمال حادثة إذا علم وقوع حادثة أخرى .
المهارات الأساسية	الحادثة المركبة - الحوادث المستقلة - الحوادث الغير مستقلة - الاحتمال المشروط - شجرة الاحتمال - الحادثة المشروطة .

**الحادثة البسيطة :** هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما

**الحادثة المركبة :** هي الحادثة التي تتكون من حاشتين بسيطتين او اكثر

ويمكن ان تكون الحوادث المركبة مستقلة او غير مستقلة :

تكون A و B **حادثتين مستقلتين**: إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.

تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين**: إذا كان احتمال حدوث A يغير بطريقة ما احتمال حدوث B.

**ملاحظة :** افترض انه تم اختيار عناصر من مجموعة ما

فإذا أعيد العنصر في كل مرة فان اختيار عناصر اخرى هي **حوادث مستقلة**

وإذا لم يرجع العنصر في كل مرة فان اختيار عناصر اخرى هي **حوادث غير مستقلة**

### قانون ضرب الاحتمالات

1. احتمال حادثتين مستقلتين : احتمال وقوع حاشتين غير مستقلتين معا يساوي حاصل ضرب

احتمال وقع الحادثة الاولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B)$$

2. احتمال حادثتين غير مستقلتين: احتمال وقوع حاشتين غير مستقلتين معا يساوي حاصل ضرب

احتمال وقع الحادثة الاولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية **بعد** وقوع الاولى فعلا

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B|A)$$

قيم الاحتمال

1. لاي حادثة X في تجربة عشوائية

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

2. مجموع احتمالات جميع النواتج في

تجربة عشوائية يساوي 1

يقرأ الرمز  $P(B \setminus A)$  احتمال وقوع الحادثة

B بشرط وقوع الحادثة A أولا وهذا يسمى

الاحتمال المشروط ويمكنك استعمال

الرسم الشجري مع الاحتمالات وتسمى شجرة

الاحتمالات

### الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$  حيث  $P(A) \neq 0$

مثال 1 : عند إلقاء قطعة نقد ورمي مكعب مرقم مرة واحدة ، ما احتمال ظهور الشعار والعدد 4

#### الحادثان مستقلتين

A تمثل ظهور شعار عند إلقاء قطعة النقد  $P(A) = \frac{1}{2}$

B تمثل ظهور العدد 4 عند رمي مكعب مرقم  $P(B) = \frac{1}{6}$

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \approx 0.0833 \approx 8.33 \%$$

مثال 2 : في تجربة سحب كراتين متتاليتين عشوائيا بدون ارجاع ، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و4 كرات زرقاء . ما احتمال اختيار كرة زرقاء في المرتين ؟

#### الحادثان غير مستقلتين.

A تمثل سحب كرة زرقاء في المرة الاولى  $P(A) = \frac{3}{7}$

B تمثل سحب كرة زرقاء في المرة الثانية  $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \approx 0.143 \approx 14.3 \%$$

مثال 3 : تم توزيع 10 طلاب على فريقين ليلعبوا كرة القدم ، ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1-10 عشوائيا حيث

- يشكل الفريق A الطلاب الذين يسحبون الأعداد الفردية .
- يشكل الفريق B الطلاب الذين يسحبون الأعداد الزوجية .

ما احتمال ان يكون محمود من الفريق A قد سحب العدد 7 ؟

#### احتمال مشروط

A تمثل حادثة سحب عدد فردي :  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

عدد النواتج = 5

B تمثل حادثة سحب العدد 7 بعد ما تم سحب الطلاب الذين من الفريق

$$P(B|A) = \frac{1}{5} = 0.2 = 20 \%$$



## 3 - 5 احتمالات الحوادث المتنافية



المهارات السابقة	إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث الغير مستقلة .
المفردات	أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث الغير متنافية أجد احتمال متممة حادثة
المهارات الأساسية	الحدثان المتنافيتان هما حادثتين لم يكن وقوعهما ممكنا في الوقت نفسه ولا يوجد بينهما نواتج مشتركة الحادثة المتممة

### قانوني الجمع في الاحتمالات

1. احتمال الحادثتين المتنافيتين: إذا كانت الحادثتان  $A, B$  متنافيتان فاحتمال وقوع  $A$  او

$B$  يساوي مجموع احتمال كل منهما

$$P(B \cup A) = P(A) + P(B)$$

2. احتمال الحادثتين غير المتنافيتين: إذا كانت الحادثتان  $A, B$  غيرمتنافيتين فاحتمال وقوع

$A$  او  $B$  يساوي هو مجموع احتماليهما مطروحا منه احتمال وقوع  $A$  و  $B$  معا

$$P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

### الحوادث المتممة

احتمال الحوادث المتممة: هو احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة

أي أن: لاي حادثة  $A$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مثال 1: إذا كان احتمال إصابة هدف معين  $\frac{2}{7}$  فأوجد احتمال عدم إصابته ؟

$$P(A) = \frac{2}{7}, \text{ تمثل إصابة الهدف}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

#### رمز التقاطع ( $\cap$ )

يدل هذا الرمز على تقاطع الحادثتين معا

( وقوع الحادثتين معا )

ويشير الى ضرب الاحتمالات

$$P(B \cap A)$$

يقراً احتمال وقوع  $A$  و وقوع  $B$

#### رمز الاتحاد ( $\cup$ ):

يدل على وقوع أحد الحادثين على الاقل . و

يشير الى جمع الاحتمالات

$$P(B \cup A)$$

يقراً احتمال وقوع  $A$  أو وقوع  $B$

مثال 2 : حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي الشركة وكانت جائزته أن يختار عشوائيا واحدة من بين 3 بطاقات سفر ، 6 كتب ، 9 ساعات و 7 نظارات . ما احتمال أن يربح بطاقة سفر أو كتابات أو ساعة ؟

الحادثان متنافيتين

$$\text{المجموع الكلي } 3 + 6 + 9 + 7 = 25$$

$$P(A) = \frac{3}{25} \text{ تمثل اختيار بطاقة سفر}$$

$$P(B) = \frac{9}{25} \text{ تمثل اختيار بطاقة كتب}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{3}{25} + \frac{6}{25} + \frac{9}{25} = \frac{18}{25} = 0.72 = 72\%$$

مثال 3 :يبين الجدول المقابل عدد طلاب في الصفوف الثلاثة في مدرسة ثانوية وهم يلعبون كرة السلة وكرة القدم وكرة الطائرة . إذا اختير احد الطلاب عشوائيا اوجد احتمال أن يكون من الصف الاول الثانوي أو يلعب كرة القدم

الرياضة	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
كرة السلة	6	5	6
كرة القدم	5	8	7
كرة الطائرة	3	4	6

الحادثان غير متنافيتين لان يوجد مشترك بينهما

$$\text{المجموع الكلي } 6 + 5 + 3 + 5 + 8 + 4 + 6 + 7 + 6 = 50$$

A تمثل اختيار طالب ان يكون من الصف الاول الثانوي

$$P(A) = \frac{6+5+3}{50} = \frac{14}{50}$$

B تمثل اختيار طالب يلعب كرة القدم

$$P(B) = \frac{5+8+7}{50} = \frac{20}{50}$$

$A \cap B$  تمثل اختيار طالب من الصف الاول الثانوي أو يلعب كرة القدم

$$P(A \cap B) = \frac{5}{50}$$

$$P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{14}{50} + \frac{20}{50} - \frac{5}{50} = \frac{29}{50} = 0.58 = 58\%$$

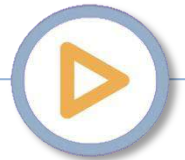
ملخص دروس

الفصل الثامن

حساب المثلثات



# 1 - 4 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



المهارات السابقة	نظرية فيثاغورس
المفردات	<p><b>حساب المثلثات:</b> فرع من أفرع الرياضيات والذي يدرُس العلاقة بين أضلاع المثلثات وزواياهم</p> <p><b>النسبة المثلثية:</b> مقاييسُ خاصّةٌ للمثلث القائم وهي النسبة بين طولي ضلعين في المثلث القائم</p> <p><b>الدالة المثلثية:</b> مجموعة من الدوال الحقيقية التي تربط زاوية مثلث قائم مع نسبة ضلعين من أضلاعه</p> <p><b>الجيب ، جيب التمام ، الظل ، ظل التمام ، القاطع ، قاطع التمام</b></p> <p><b>دوال المقلوب:</b> هي مقلوب النسب الجيب ، جيب التمام ، الظل</p> <p><b>معكوس الجيب لـ <math>x</math>:</b> هي الزاوية التي جيبها <math>x</math></p> <p><b>معكوس جيب التمام لـ <math>x</math>:</b> هي الزاوية التي جيب تمامها <math>x</math></p> <p><b>معكوس الظل <math>x</math>:</b> هي الزاوية التي ظلها <math>x</math></p> <p><b>زاوية الارتفاع:</b> هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أعلى الأفقي.</p> <p><b>زاوية الانخفاض:</b> هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أسفل الأفقي</p>
	<p>أجد قيم الدوال المثلثية لزوايا حادة .</p> <p>أستعمل الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلثات قائمة الزاوية .</p>

## الدوال المثلثية للزوايا الحادة

$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ الجيب		$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ قاطع التمام
$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ جيب التمام		$\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ القاطع
$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ الظل		$\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ ظل التمام

## دوال المقلوب

$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$
---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

مثال: في المثلث أدناه فيه طول ضلعين فيه (5، 13) أوجد الدوال المثلثية للزاوية  $\theta$  أولاً نوجد طول الضلع الثالث

$\sin \theta = \frac{5}{13}$		$\csc \theta = \frac{13}{5}$
$\cos \theta = \frac{12}{13}$		$\sec \theta = \frac{13}{12}$
$\tan \theta = \frac{5}{12}$		$\cot \theta = \frac{12}{5}$



## قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

الدالة	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

## معكوس النسب المثلثية (لإيجاد قياس الزاوية $\theta$ )

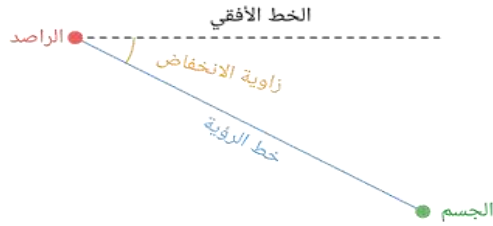
$$\sin^{-1} x = \theta$$

$$\cos^{-1} x = \theta$$

$$\tan^{-1} x = \theta$$

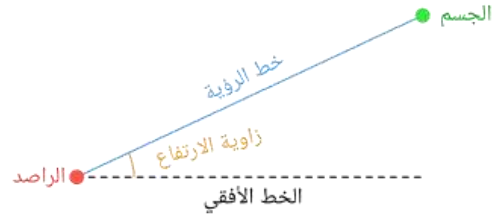
### زوايا الانخفاض

هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أسفل الأفقي



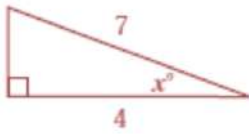
### زوايا الارتفاع

هي الزاوية التي تنشأ عن خط الرؤية للراصد والخط الأفقي لرصد جسم أعلى الأفقي.



## تطبيقات

أوجد قيمة  $x$  في الشكل المقابل



المعطيات: مثلث قائم الزاوية فيه الوتر = 7

الضلع المجاور للزاوية  $x = 4$

المطلوب قياس الزاوية  $x$

الحل: نستخدم الدوال العكسية لإيجاد

الزاوية ومنها تحديد الدالة جيب التمام

$$\cos x = \frac{4}{7}$$

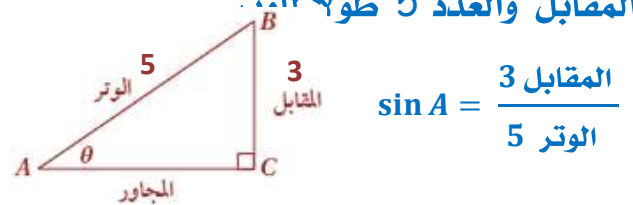
$$x = \cos^{-1} \frac{4}{7}$$

$$x = 55.2^\circ$$

إذا كان  $\sin A = \frac{3}{5}$  أوجد  $\cos A$ .

الخطوة 1: ارسم مثلثا قائم الزاوية، وسم إحدى زواياه الحادة  $A$  بوضع العدد 3 طولاً للضلع

المقابل والعدد 5 طولاً للوتر.



$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

الخطوة 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد

قيمة الضلع المجاور = المجاور

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$


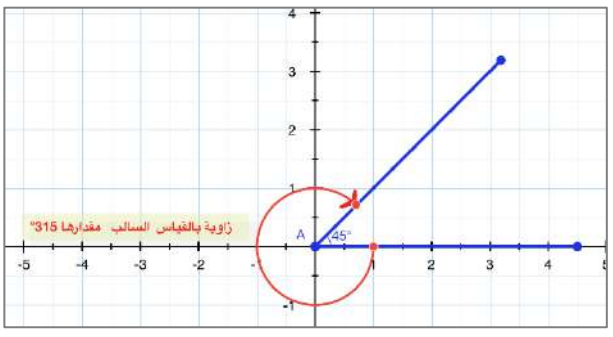

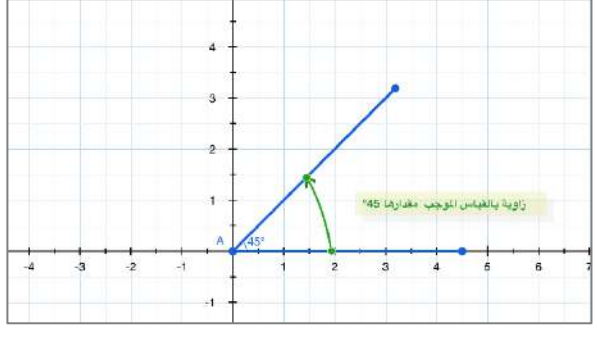
الخطوة 3: نوجد  $\cos A$ :

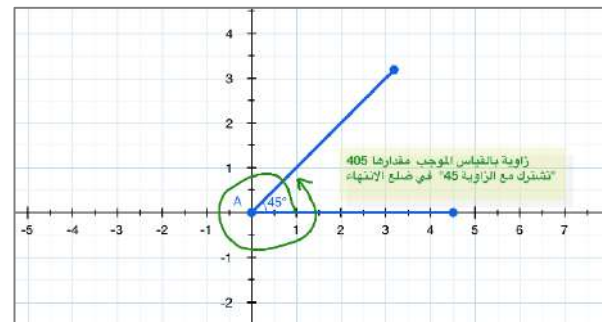
$$\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$



<p>أرسم زوايا في الوضع القياسي وأجد قياساتها .</p>	<p>المهارات السابقة</p>
<p><b>الوضع القياسي :</b> للزاوية إذا كان رأسها نقطة الأصل وأحد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب لمحور X .</p> <p><b>ضلع الابتداء :</b> للزاوية هو الضلع المنطبق على المحور X .</p> <p><b>ضلع الانتهاء :</b> للزاوية هو الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل .</p> <p><b>الراديان :</b> وحدة قياس للزوايا وهي الزاوية المركزية في دائرة التي تقابل قوساً طوله مساو لطول نصف قطر الدائرة .</p> <p><b>الزاوية المركزية :</b> هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة .</p> <p><b>طول القوس :</b></p>	<p>المفردات</p>

<p><b>الراديان</b></p> <p>يعادل الراديان الواحد <math>\frac{180}{\pi}</math> درجات أي بالتقريب <math>57.296^\circ</math></p> 	<p><b>الوضع القياسي للزوايا</b></p> 
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p><b>القياس السالب</b></p>  	<p><b>القياس الموجب</b></p>  
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها:  $45^\circ, 405^\circ, -315^\circ$

يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات  $360^\circ$ .

## إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

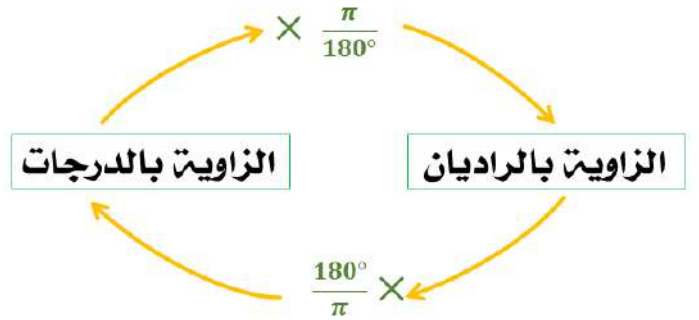
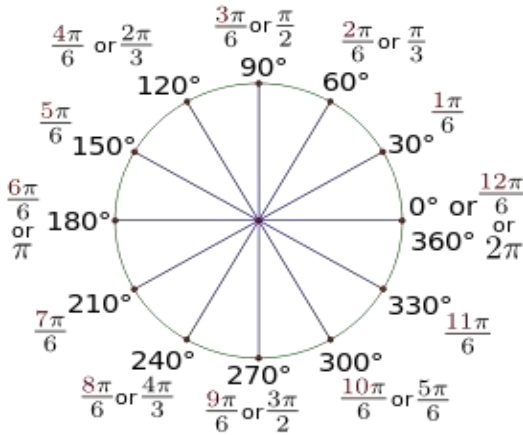
أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب ، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة :

$-90^\circ$	$130^\circ$
$-90^\circ + 360^\circ = 270^\circ$ القياس الموجب	$130^\circ + 360^\circ = 490^\circ$ القياس الموجب
$-90^\circ - 360^\circ = -450^\circ$ القياس السالب	$130^\circ - 360^\circ = -230^\circ$ القياس السالب

## التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

يمكن أن تقاس الزوايا بالدرجات أو بالراديان، وهما وحدتان مرتبطتان بطول القوس. والراديان الواحد هو قياس زاوية في الوضع القياسي، يقطع ضلع الانتهاء لها قوس من الدائرة طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة، ويرتبط القياسان من خلال المعادلتين:

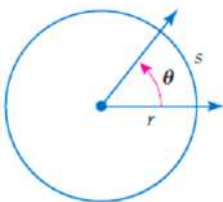
$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad \text{أو} \quad \pi \text{ rad} = 180^\circ$$



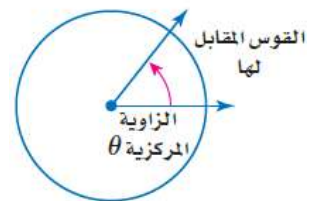
مثال حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

## الزاوية المركزية وطول القوس

طول القوس = حاصل ضرب قياس الزاوية المقابلة له بالراديان في نصف القطر

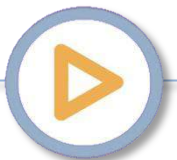


إذا علم قياس الزاوية المركزية بالراديان من السهل إيجاد طول القوس





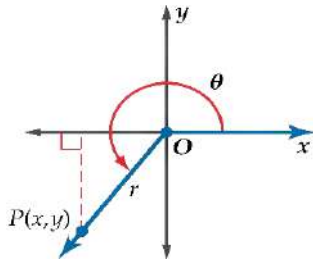
### 3 - 4 الدوال المثلثية للزوايا



المهارات السابقة	إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة .
المفردات	<b>الزوايا الربعية</b> : هي زوايا موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي علي أحد محوري الإحداثيات $x, y$ . <b>الزوايا المرجعية</b> : هي الزاوية الحادة الموجبة باستخدام الاتجاه الموجب للمحورس باعتبارها إطارها المرجعي .
المهارات الأساسية	أجد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية . أجد قيم الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية .

يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية لزاويا قياساتها تزيد على  $90^\circ$  أو تقل عن  $0^\circ$

من خلال إحداثيات النقطة  $P(x, y)$  التي تقع على ضلع الانتهاء لزاوية في وضع قياسي مقدارها  $\theta$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ الوتر}$$

$x$  المجاور  $y$  المقابل

فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية  $\theta$  معرفة كما يلي

$\sin \theta = \frac{y}{r}$	$\cos \theta = \frac{x}{r}$	$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$
$\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$	$\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$	$\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$

مثال : إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة  $(-2, -5)$

فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية  $\theta$  ؟

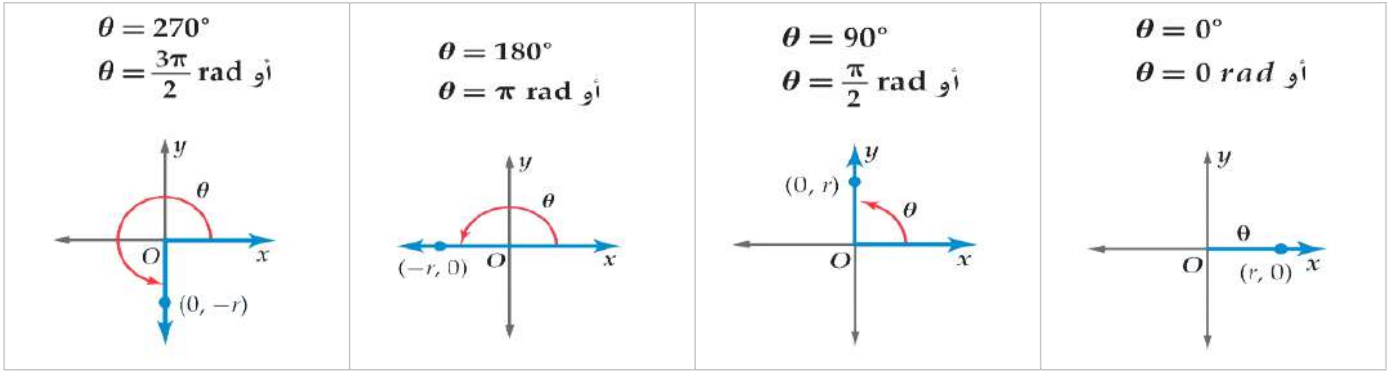
نوجد قيمة  $r$  :  $x = -2, y = -5$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

ثم نعوض

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{\sqrt{29}} = \frac{-5\sqrt{29}}{29}$	$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{29}} = \frac{-2\sqrt{29}}{29}$	$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$
$\csc \theta = \frac{r}{y} = -\frac{\sqrt{29}}{5}$	$\sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{\sqrt{29}}{2}$	$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

## الزوايا الربعية وهي ( $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ )

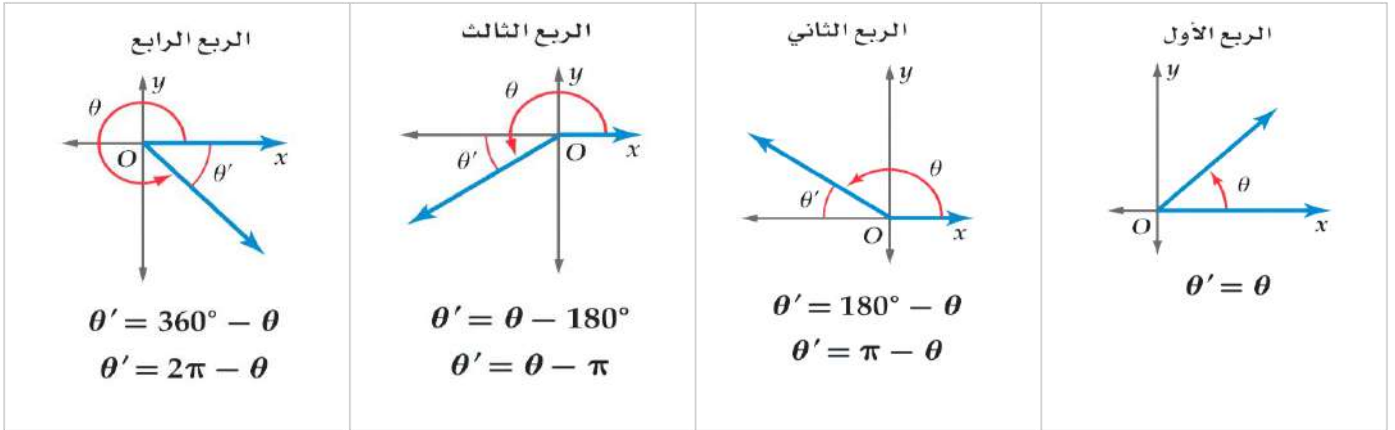


### قيم الدوال المثلثية عند الزوايا الربعية دائما ثابتة كالجدول التالي

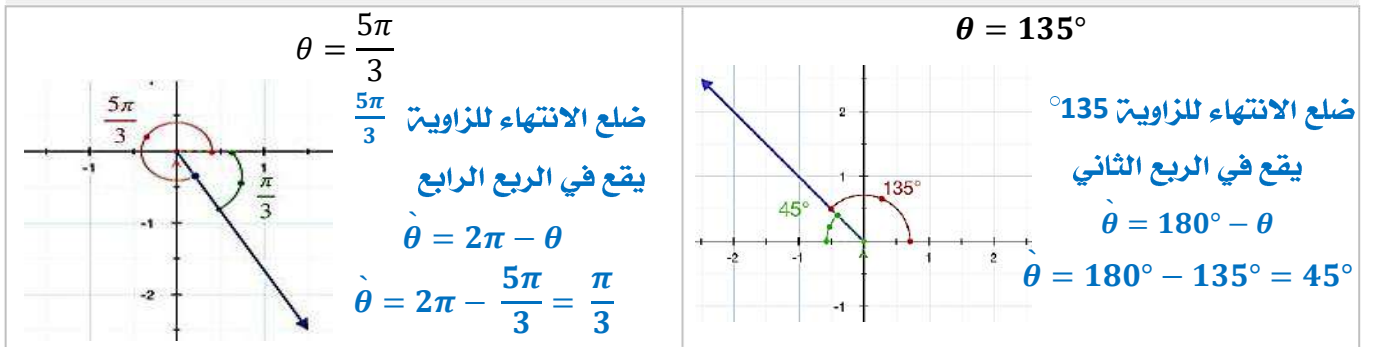
الدالة	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ = 0^\circ$
$\sin \theta$	1	0	-1	0
$\cos \theta$	0	-1	0	1
$\tan \theta$	غير معرف	0	غير معرف	0

### الزوايا المرجعية

(إذا أعطيت زوايا أكبر من  $90^\circ$  وأصغر من  $0^\circ$  يتم إرجاعها لزوايا حادة محصورة بين ضلع انتهاء الزاوية المعطاة ومحور x)



### مثال : ارسم كلا من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها



### إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية من خلال الزاوية المرجعية لها تتبع ثلاث خطوات :

- نوجد قياس الزاوية المرجعية للزاوية المعطاة
- نوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية المرجعية
- نحدد إشارة قيمة الدالة للزاوية المعطاة حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء

## قاعدة إشارات الدوال المثلثية في الأرباع

إذا كانت لدينا زاوية  $\theta$  في الوضع القياسي، فإننا نقول إن الزاوية  $\theta$  تقع في الربع نفسه الذي يقع فيه ضلعها النهائي. **ولتحديد إشارة الدوال المثلثية لزاوية معلومة  $\theta$  نضع في أذهاننا** أن إشارة دالت جيب التمام تتبع إشارة محور  $x$  وأن إشارة دالت الجيب تتبع إشارة محور  $y$  والتوزيع التالي

في الربع الثاني، تكون قيمة  $\sin$  موجبة

الربع الثاني	↑	الربع الأول
$\sin \theta, \csc \theta: +$		$\sin \theta, \csc \theta: +$
$\cos \theta, \sec \theta: -$		$\cos \theta, \sec \theta: +$
$\tan \theta, \cot \theta: -$		$\tan \theta, \cot \theta: +$
←		→
الربع الثالث	↓	الربع الرابع
$\sin \theta, \csc \theta: -$		$\sin \theta, \csc \theta: -$
$\cos \theta, \sec \theta: -$		$\cos \theta, \sec \theta: +$
$\tan \theta, \cot \theta: +$		$\tan \theta, \cot \theta: -$

في الربع الأول، تكون قيم الكلي موجبة

في الربع الثالث، تكون قيمة  $\tan$  موجبة

في الربع الرابع، تكون قيمة  $\cos$  موجبة.

## قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

الدالة	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

## الزوايا الشهيرة التي زواياها المرجعية ( $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ )

	الربع (1)	الربع (2)	الربع (3)	الربع (4)
$30^\circ$	$30^\circ$	$151^\circ$	$210^\circ$	$330^\circ$
$45^\circ$	$45^\circ$	$135^\circ$	$225^\circ$	$315^\circ$
$60^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$	$240^\circ$	$300^\circ$

تتفق الزوايا الشهيرة مع زواياها المرجعية بقيم الدوال المثلثية وتختلف بالإشارات كالتالي

**مثال : أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يلي:**

$$\csc 120^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

الإشارة موجبة لأن الزاوية تقع في الربع الثاني والدالة  $\sin$  في هذا الربع موجبة

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

الإشارة سالبة لأن الزاوية تقع في الربع الثاني والدالة  $\cos$  في هذا الربع سالبة

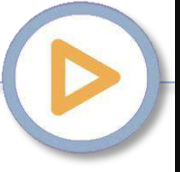
$$\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

الإشارة سالبة لأن الزاوية تقع في الربع الرابع والدالة  $\tan$  في هذا الربع سالبة



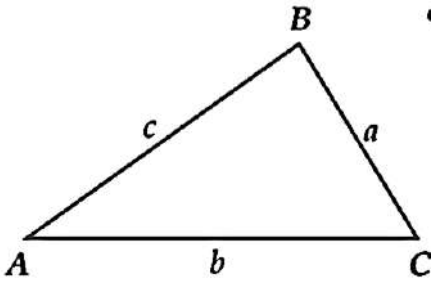


## 4 - 4 قانون الجيوب



المهارات السابقة	إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية وقياسات زواياها .
المفردات	<b>قانون الجيوب</b> : هو قانون أو معادلتين تربط بين أطوال أضلاع المثلث بجيوب زواياه الداخلية طبقاً للعلاقة . <b>حل المثلث</b> : استعمال القياسات المعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلث وقياس زواياه.
المهارات الأساسية	إيجاد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما . أستعمل قانون الجيوب في حل المثلثات .

### إيجاد مساحة المثلث



$$k = \frac{1}{2} a \cdot b \sin C$$

$$k = \frac{1}{2} a \cdot c \sin B$$

$$k = \frac{1}{2} b \cdot c \sin A$$

مساحة المثلث  $k$  تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما

**تطبيق: أوجد مساحة المثلث  $\Delta ABC$  في كل من الحالات التالية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة :**

$$A = 34^\circ , b = 19.4 \text{ ft} , c = 8.6 \text{ ft}$$

$$k = \frac{1}{2} b \cdot c \sin A$$

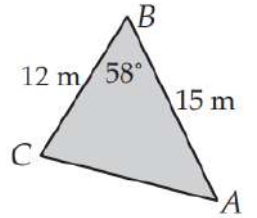
$$k = \frac{1}{2} (19.4)(8.6) \sin 34^\circ$$

$$k = 46.6 \text{ ft}^2$$

$$k = \frac{1}{2} a \cdot c \sin B$$

$$k = \frac{1}{2} (12)(15) \sin 58^\circ$$

$$k = 76.3 \text{ m}^2$$



### قانون الجيوب لحل المثلثات

يستخدم قانون الجيوب لحل المثلث في الحالات الآتية:

- معرفة قياس زاويتين في المثلث وطول أي ضلع في إما زاوية - زاوية - ضلع حالة **AAS** ، أو زاوية - ضلع - زاوية حالة **ASA** وفي هذه الحالة يوجد للمثلث حل وحيد أي يوجد مثلث وحيد
- معرفة طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما ضلع - ضلع - زاوية حالة **SSA** وفي هذه الحالة إن عدد المثلثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلث حل أو له حل واحد، أو له حلان.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ينص قانون الجيب على أن النسبة بين طول أي ضلع وجيب الزاوية المقابلة له متساوية لجميع الأضلاع الثلاثة والزوايا المقابلة لها في أي مثلث .

## تطبيقات

**حل المثلث الذي فيه  $B = 47^\circ, C = 112^\circ, b = 13$**

من المعطيات زاويتين نوجد الزاوية الثالثة من مجموع زوايا المثلث:  $A = 180^\circ - (112^\circ + 47^\circ) = 21^\circ$

باستخدام قانون الجيوب التعويض حل النسبة وإيجاد قيمة المتغير

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 21^\circ}{a} = \frac{\sin 47^\circ}{13}$$

$$a = \frac{13 \sin 21^\circ}{\sin 47^\circ} = 6.4$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

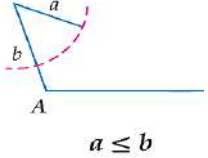
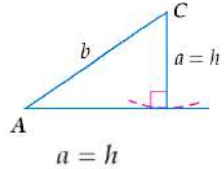
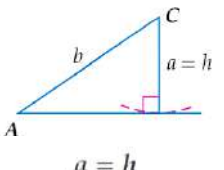
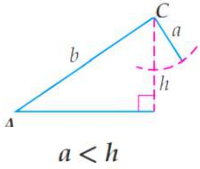
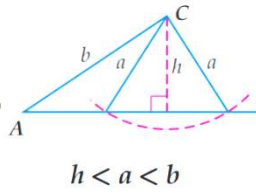
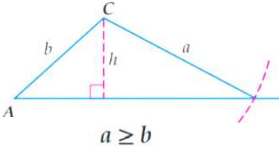
$$\frac{\sin 47^\circ}{13} = \frac{\sin 112^\circ}{c}$$

$$c = \frac{13 \sin 112^\circ}{\sin 47^\circ} = 16.5$$

## المثلثات الممكنة في حالة SSA

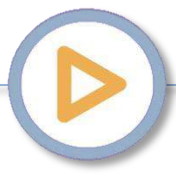
إذا علم في مثلث  $m\angle A, a, b$

فإن الحالات الممكنة تعتمد أولاً على قيمة الزاوية  $A$

مثال	التوضيح بالرسم	الحالة
$A = 131^\circ, a = 15, b = 32$	لا يوجد حل  $a \leq b$	إذا كانت $\angle A$ قائمة أو منفرجة
$A = 95^\circ, a = 19, b = 12$	يوجد حل واحد  $a = h$	
$A = 30^\circ, a = 3, b = 6$ $h = 6 \sin 30^\circ = 3$	يوجد حل واحد  $a = h$	إذا كانت $\angle A$ حادة
$A = 60^\circ, a = 15, b = 24$ $h = 24 \sin 60^\circ \approx 20.8$	لا يوجد حل  $a < h$	
$A = 34^\circ, a = 8, b = 13$ $h = 13 \sin 34^\circ \approx 7.3$	يوجد حلين وتسمى هذه الحالة بالحالة المبهمة  $h < a < b$	
$A = 38^\circ, a = 21, b = 18$	يوجد حل واحد  $a \geq b$	



## 4 - 5 قانون جيب التمام



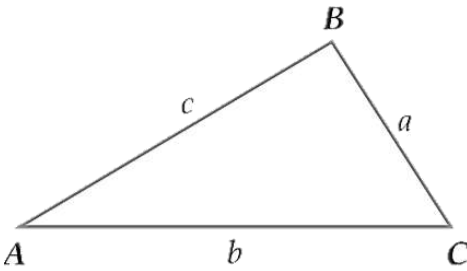
المهارات السابقة	حل المثلثات باستخدام قانون الجيوب.
المفردات	<b>قانون جيب التمام</b> : هو قانون ومبرهنة تربط ضلع أي مثلث بضلعيه الآخرين وجيب تمام الزاوية المحصورة بينهما.
المهارات الأساسية	أستعمل قانون جيب التمام لحل المثلثات . أختر طرقا مناسبة لحل المثلثات

### استعمال قانون جيب التمام لحل المثلث

- معرفة طولي ضلعين في المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما ( ضلع - زاوية - ضلع ) حالة SAS
- معرفة أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث ( ضلع - ضلع - ضلع ) حالة SSS

### قانون جيب التمام

إذا كانت أضلاع  $\Delta ABC$  لتي أطوالها  $a, b, c$ : تقابل الزوايا ذات القياسات  $A, B, C$  على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

**تطبيق** : حدد أنسب طريقة يجب البدء بها (قانون الجيوب أم قانون جيب التمام) لحل المثلث مما يأتي، ثم حل المثلث مقربا أطوال الأضلاع أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

$$C = 54^\circ, a = 16, b = 20$$

الحل : القانون المناسب قانون جيب التمام لان حالة المثلث هي SAS

**الخطوة الأولى**: نستعمل قانون جيب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 16^2 + 20^2 - 2(16)(20) \cos 54^\circ = 279.82$$

$$c = 16.7$$

**الخطوة الثانية**: استعمال قانون جيب التمام لإيجاد قياس الزاوية A. (ويمكن في هذه الخطوة إيجاد قيمته

الزاوية باستخدام قانون الجيوب)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$16^2 = 20^2 + 16.7^2 - 2(20)(16.7) \cos A$$

$$256 = 400 + 278.9 - 668 \cos A$$

$$-422.9 = -668 \cos A$$

$$\cos A = \frac{-422.9}{-668} = 0.6331$$

$$A = \cos^{-1} 0.6331 \approx 51^\circ$$

**الخطوة الثالثة**: نوجد قياس الزاوية B : من مجموع زوايا المثلث :  $B = 180^\circ - (51^\circ + 54^\circ)$

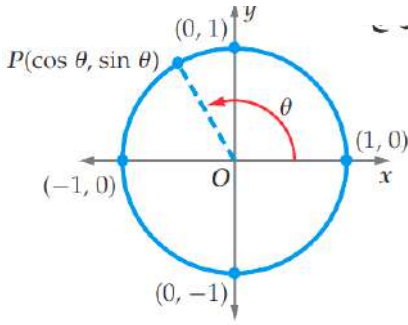
$$B = 75^\circ$$

## 4 - 6 الدوال الدائرية



المهارات السابقة	إيجاد قيم دوال مثلثية باستعمال زوايا مرجعية .
المهارات الأساسية	أجد قيم دوال مثلثية بالاعتماد على دائرة الوحدة . أستعمل خواص الدوال الدورية في إيجاد قيم دوال مثلثية .
المفردات	<b>دائرة الوحدة</b> : أو الدائرة المثلثية هي دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها يساوي الواحد <b>الدالة الدائرية</b> : وتسمى أيضاً بالدوال المثلثية وهي مجموعة من الدوال الحقيقية التي تربط زاوية مثلث قائم مع نسبة ضلعين من أضلاعه. <b>الدالة الدورية</b> : هي دالة تكرر قيمتها بعد فترة محددة منتظمة متتالية . <b>الدورة</b> : النمط الواحد الكامل في الدالة الدورية <b>طول الدورة</b> : المسافة الأفقية في الدورة

### في دائرة الوحدة



المركز:  $(0,0)$

نصف القطر:  $r = 1$

الزاوية:  $\theta$  في وضع قياسي

$P(x, y)$  نقطة تقع على تقاطع ضلع الانتهاء مع دائرة الوحدة

$$P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta)$$

### تطبيقات

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ فأوجد كلا من } \sin \theta, \cos \theta$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = P(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

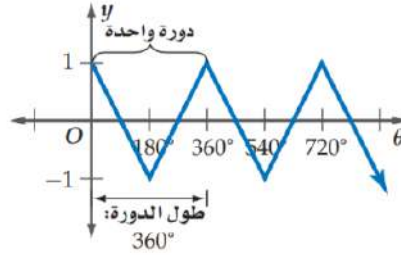
**ملاحظات هامة**: من خلال المعطى  $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  يمكن تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء وهو الثالث

لأن إشارات احداثيات كل من  $x, y$  سالبة ويمكن إيجاد باقي الدوال باستخدام دوال المقلوب او النسب المثلثية .

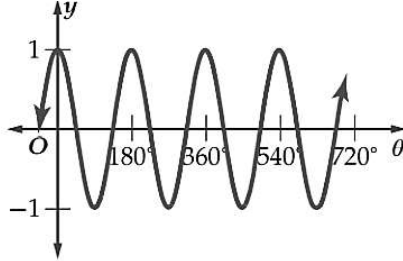
## الدوال الدورية

$\theta$	$y$
$0^\circ$	1
$180^\circ$	-1
$360^\circ$	1
$540^\circ$	-1
$720^\circ$	1

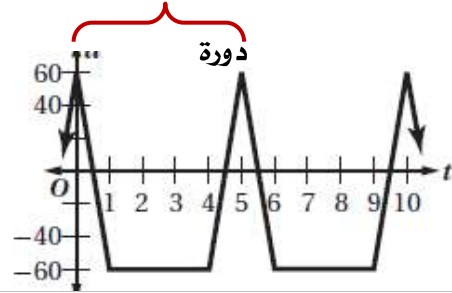
تتكرر الدورة كل  $360^\circ$



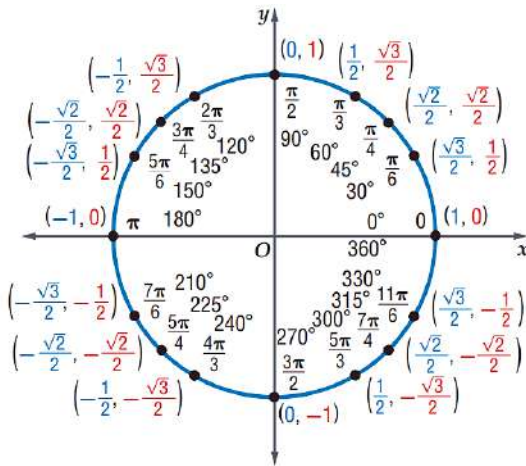
دالة دورية تتكرر بنمط معين طول الدورة :  $180^\circ$



دالة دورية تتكرر بنمط معين طول الدورة : 5



يبين الشكل المجاور القيم الدقيقة لكل من  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة



$$\cos \theta = x \Rightarrow \sec \theta = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$\sin \theta = y \Rightarrow \csc \theta = \frac{1}{y}, y \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

**ملاحظات هامة** تتكرر دورة كل من دالتي الجيب وجيب التمام كل  $360^\circ$ .

وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كل منهما  $2\pi$  أو  $360^\circ$

لذا فإن قيم كل من الدالتين تتكرر كل  $360^\circ$ . فتكون النتيجة التالية صحيحة دائما

$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos \theta$$

**تطبيق أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي**

$$\begin{aligned} & \cos 7\pi \\ &= \cos(\pi + 3(2\pi)) \\ &= \cos \pi = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin 585^\circ \\ &= \sin(225^\circ + 360^\circ) \\ &= \sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

## 7 - 4 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



المهارات السابقة	الدوال الدورية
المهارات الأساسية	أصف دوال الجيب وجيب التمام والظل وأمثلها بيانياً . أصف دوال مثلثية أخرى وأمثلها بيانياً .
المفردات	<b>السعة</b> : لمنحنى دالة الجيب أو دالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة. <b>التردد</b> : هو عدد الدورات في وحدة الزمن. وهو وصف للموجات والحركة الدورية

### التمثيل البياني وخصائص دالتي الجيب وجيب التمام

الدالة الأم	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	
المدى	$\{y   -1 \leq y \leq 1\}$	
السعة	1	
طول الدائرة	$360^\circ$	

### الصورة العامة لتحويلات التمثيل البياني للدوال المثلثية

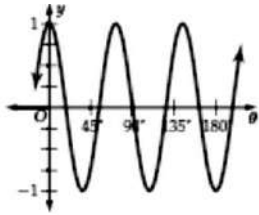
$y = a \sin b\theta$ نقاط تقاطع الدالة محور $\theta$ : $(0, 0)$ و $(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0)$ و $(\frac{360^\circ}{b}, 0)$	$y = a \cos b\theta$ نقاط تقاطع الدالة محور $\theta$ : $(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0)$ و $(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0)$
$ a  = \text{السعة}$ ، وطول الدورة $= \frac{360^\circ}{ b }$	



## تطبيقات : أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانياً:

$$\text{السعة} = |1| = 1$$

$$\text{طول الدورة} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$



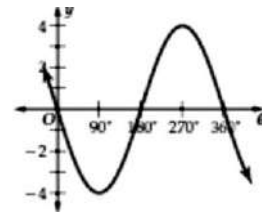
نقاط تقاطع الدالة محور  $\theta$  :

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{5}, 0\right) \text{ و } \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{5}, 0\right)$$

$$(54^\circ, 0) \text{ و } (18^\circ, 0)$$

$$\text{السعة} = |-4| = 4$$

$$\text{طول الدورة} = \frac{360^\circ}{1} = 360^\circ$$



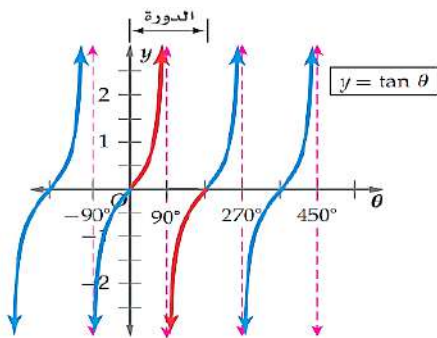
نقاط تقاطع الدالة محور  $\theta$  :

$$(0, 0) \text{ و } \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{1}, 0\right) \text{ و } \left(\frac{360^\circ}{1}, 0\right)$$

$$(0, 0) \text{ و } (180^\circ, 0) \text{ و } (360^\circ, 0)$$

تستخدم الدوال المثلثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتم وصف هذه الأمواج عادة باستعمال التردد، التردد = مقلوب طول الدورة

## دالة الظل



$$y = \tan \theta$$

$$\{\theta \mid \theta \neq 90^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$$

أي غير معرفه عند  $90^\circ$  و  $270^\circ$ ....

مجموعة الأعداد الحقيقية

غير معرفه

$$180^\circ$$

الدالة الأم

المجال

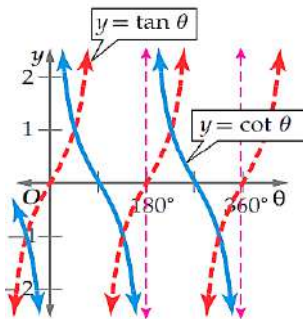
المدى

السعة

طول الدورة

## تمثيل الدوال المثلثية الأخرى

$$y = \cot \theta$$

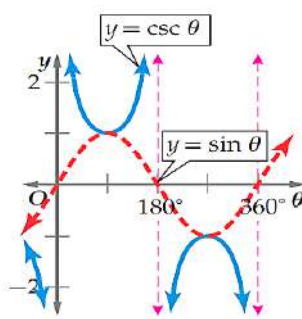


$$\{\theta \mid \theta \neq 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$$

مجموعة الأعداد الحقيقية

$$180^\circ$$

$$y = \sec \theta$$



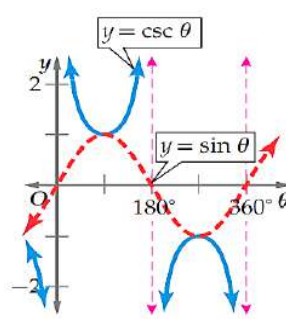
$$\{\theta \mid \theta \neq 90^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$$

غير معرفه

$$360^\circ$$

$$y = \csc \theta$$



$$\{\theta \mid \theta \neq 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$$

الدالة الأم

التمثيل  
البياني

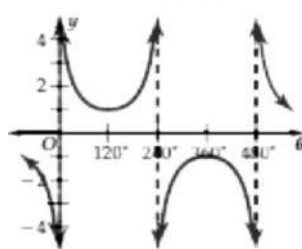
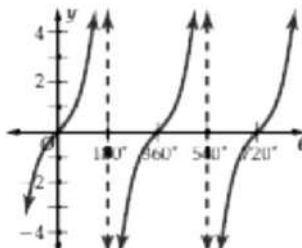
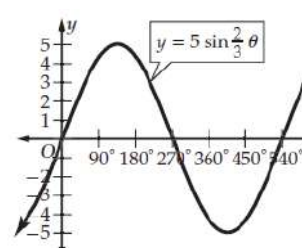
المجال

المدى

السعة

طول الدورة

أوجد السعة (إذا كانت معرفة)، وطول الدورة لكل دالة مما يأتي ومثلها بيانياً :

التمثيل البياني	طول الدورة	السعة	الدالة
	$\frac{360^\circ}{ b } = \frac{360^\circ}{\frac{3}{4}} = 360^\circ \left(\frac{4}{3}\right) = 480^\circ$	غير معرفة	$y = \csc \frac{3}{4} \theta$
	$\frac{180^\circ}{ b } = \frac{180^\circ}{\frac{1}{2}} = 360^\circ$	غير معرفة	$y = 2 \tan \frac{1}{2} \theta$
	$\frac{360^\circ}{ b } = \frac{360^\circ}{\frac{2}{3}} = 360^\circ \left(\frac{3}{2}\right) = 540^\circ$	$ 5  = 5$	$y = 5 \sin \frac{2}{3} \theta$

## 8 - 4 الدوال المثلثية العكسية



تمثيل الدوال المثلثية العكسية .	المهارات السابقة
أجد قيم الدوال المثلثية العكسية . أحل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية .	المهارات الأساسية
<b>القيم الأساسية :</b> الدوال المثلثية غير متباينة فيكون معكوس الدوال غير موجود فيتم تحديد مجال الدوال المثلثية العكسية إلى قيم أساسية محددة . <b>دالة الجيب العكسية - دالة جيب التمام العكسية - دالة الظل العكسية</b> <b>المعادلة المثلثية :</b> هي معادلات تحتوي على دوال مثلثية بزوايا مجهولة القياس	المفردات

### معكوس الدالة المثلثية :

الدالة العكسية	دالة الجيب العكسية	دالة جيب التمام العكسية	دالة الظل العكسية
الرمز	$y = \sin^{-1} x$ $y = \text{Arc sin } x$	$y = \cos^{-1} x$ $y = \text{Arc cos } x$	$y = \tan^{-1} x$ $y = \text{Arc tan } x$
المجال	$-1 \leq x \leq 1$	$-1 \leq x \leq 1$	$\mathbb{R}$
المدى	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ \leq y \leq 90^\circ$	$0 \leq y \leq \pi$ $0^\circ \leq y \leq 180^\circ$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ < y < 90^\circ$
الرسم البياني			

الفرق بين  $y = \cos^{-1} x$  و  $y = \text{Cos}^{-1} x$  عندما  $x = \frac{1}{2}$

$y = \text{Cos}^{-1} x$ $y = 60^\circ$ لذلك تسمى $y = \text{Cos}^{-1} x$ دالة	$y = \cos^{-1} x$ $y = 300^\circ$ و $60^\circ$ وكل زاوية تشترك مع هاتين الزاويتين في ضلع الانتهاء لذلك تسمى $y = \cos^{-1} x$ علاقة
-------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية

يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية بثلاث طرق

- استعمال دائرة الوحدة
- استعمال الزاوية المرجعية
- استعمال الآلة الحاسبة

### تطبيقات

أوجد قيمة ما يلي بالدرجات والراديان :

$\text{Sin}^{-1} \frac{1}{2}$ $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ $\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\text{Cos}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\text{Tan}^{-1}(-\sqrt{3})$ $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ $\theta = -60^\circ$ $= -\frac{\pi}{3}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------

أوجد قيمة ما يلي ، مقرباً إلى أقرب جزء من مئة

$\sin \left[ \text{Sin}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ $\sin \left[ \text{Sin}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ دالتا وعكسها فتكون الإجابة مباشرة وبدون آلة حاسبة $\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \left[ \text{Tan}^{-1} \frac{3}{5} \right]$ 0.86 باستخدام الآلة الحاسبة	$\tan \left[ \text{Sin}^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right) \right]$ 0.58 باستخدام الآلة الحاسبة
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------

حل المعادلات التالية ( حل المعادلات المثلثية مشابه تماماً لما سبق في الدوال العكسية ):

$\text{Sin} \theta = 2.5$ ليس لها حل لأن مجال الدالة $\text{Sin}^{-1} x$ $-1 \leq \sin x \leq 1$	$\text{Cos} \theta = -0.25$ $\theta = \text{Cos}^{-1}(-0.25)$ $= 104.48^\circ$	$\text{Tan} \theta = 3.8$ $\theta = \text{Tan}^{-1}(3.8)$ $= 75.26^\circ$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------