

تم تحميل وعرض المادة من

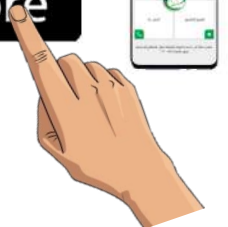
# منهجي

mnhaji.com



موقع منهجي منصة تعليمية توفر كل ما يحتاجه المعلم  
والطالب من حلول الكتب الدراسية وشرح للدروس  
بأسلوب مبسط لكافة المراحل التعليمية وتوزيع  
المناهج وتحضير وملخصات ونماذج اختبارات وأوراق  
عمل جاهزة للطباعة والتحميل بشكل مجاني

حمل تطبيق منهجي ليصلك كل جديد





# رياضيات 3

الفصل الدراسي الثاني

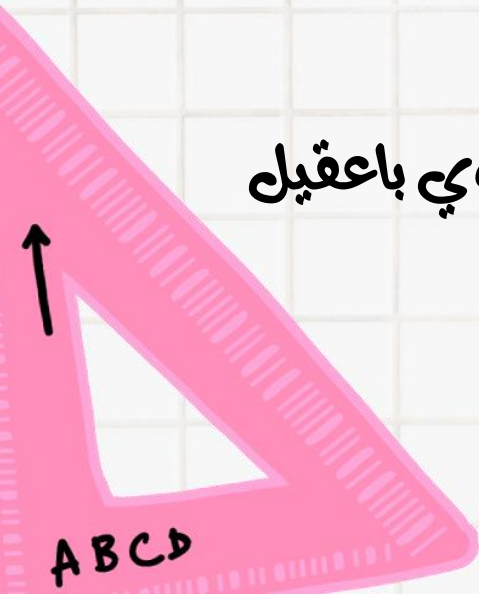
اسم الطالب/ة: .....

الصف: .....

إعداد المعلمتان:

أ. وفاء علوي باعقيل

أ. هياء ناصر أجنوبي





التوقيع

الملاحظات

الدرجة

التاريخ

م

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

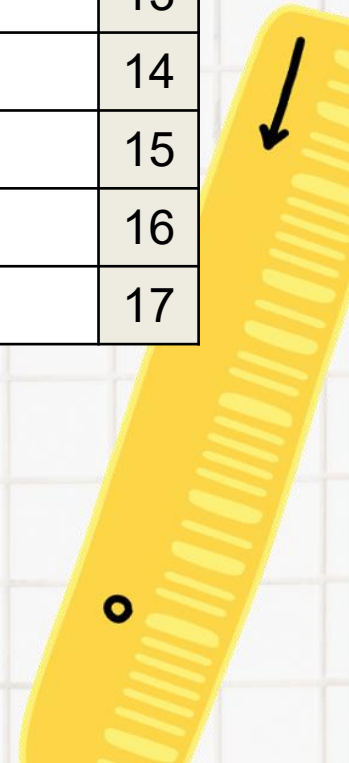
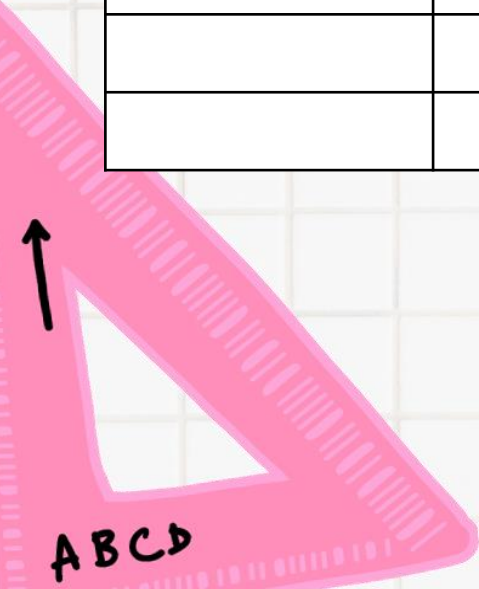
13

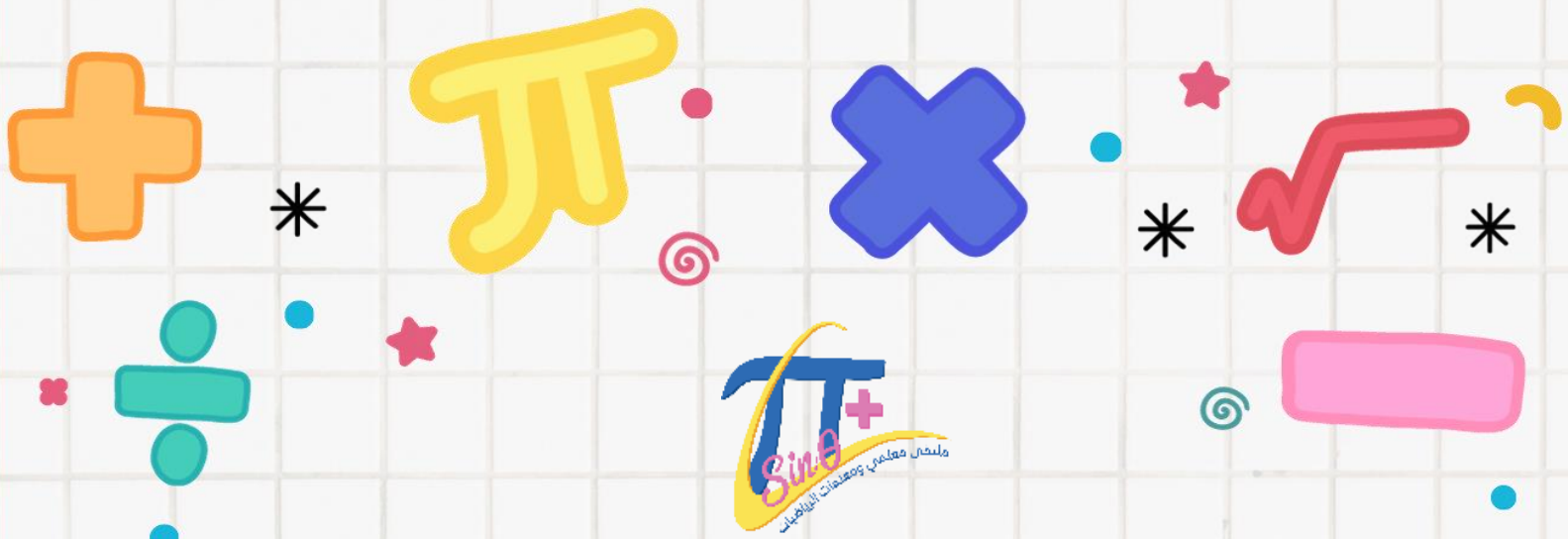
14

15

16

17

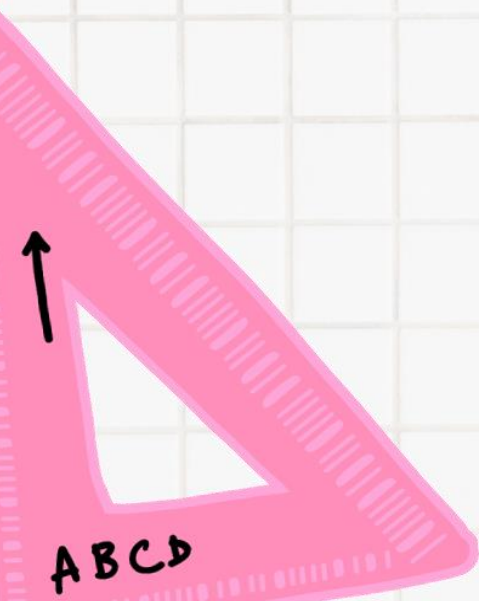




## الفصل الثالث

### امتطابقات والمعادلات المثلثية

- المتطابقات المثلثية
- إثبات صحة المتطابقات المثلثية
- المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
- حل المعادلات المثلثية



## 1 المتطابقات المثلثية الأساسية

تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها  
**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية  
 إذا وجدت مثلا مضادا يثبت خطأ المعادلة ، فالمعادلة حينئذ لا تكون متطابقة

## المتطابقات النسبية..

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

## متطابقات المقلوب..

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

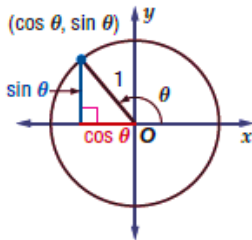
$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$$

## متطابقات فيثاغورس



حسب نظرية فيثاغورس  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

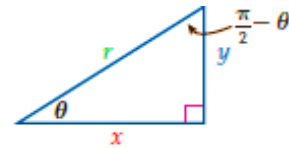
$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

## متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

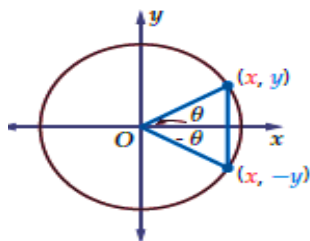
$$\tan \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta$$



$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \cot \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

## متطابقات الدوال الفردية والزوجية

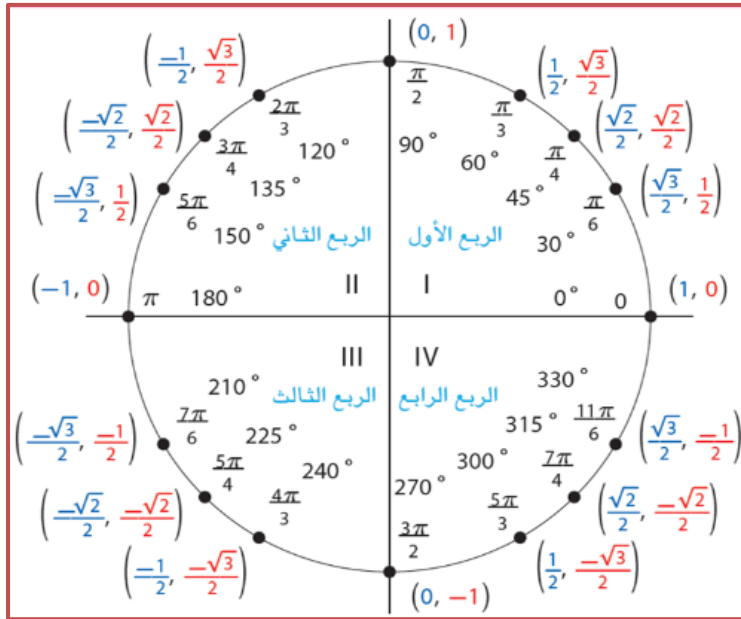


$$\begin{aligned} \sin \theta &= y & \sin(-\theta) &= -y \\ \cos \theta &= x & \cos(-\theta) &= x \end{aligned}$$

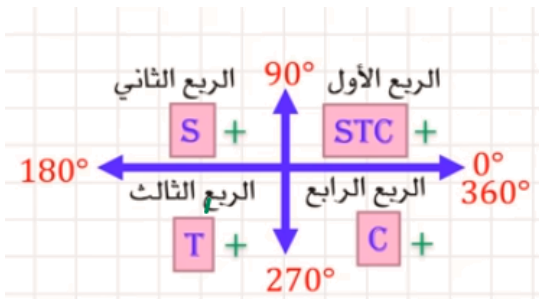
$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

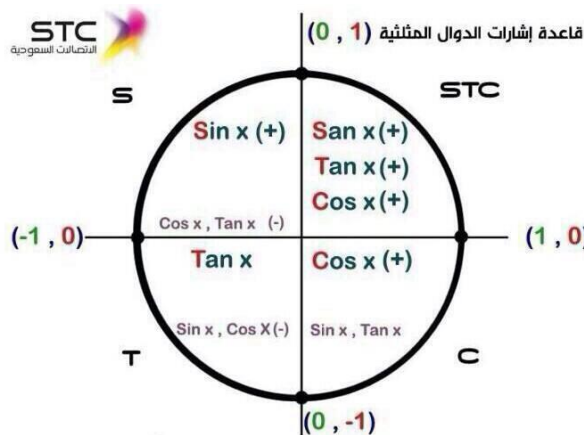
$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$



360	270	180	90	0	60	45	30	
								sin
								cos
								tan



-	+	الدالة
3, 4	1, 2	sin $\theta$
		csc $\theta$
2, 3	1, 4	cos $\theta$
		sec $\theta$
2, 4	1, 3	tan $\theta$
		cot $\theta$



## المتطابقات المثلثية الأساسية

1

تحقق من فهمك: ص 11-



1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\sec \theta$   
إذا كان  $\sin \theta = \frac{-2}{7}$ ,  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\sin \theta$   
إذا كان  $\cos \theta = \frac{1}{3}$ ,  $270^\circ < \theta < 360^\circ$

تدريب: ص 13-



8) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\cot \theta$   
إذا كان  $\sec \theta = \frac{-9}{2}$ ,  $\sin \theta < 0$

1) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\tan \theta$   
إذا كان  $\cot \theta = 2$ ,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$

## تبسيط العبارات المثلثية

2

هو إيجاد القيمة العددية للعبارة أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط , إن أمكن.

تحقق من فهمك : ص 12-



بسط كل عبارة مما يأتي:

## إرشادات للدراسة



عند تبسيط العبارات المثلثية  
يكون من الأسهل عادة أن تكتب  
حدود العبارة جميعها بدلالة  
 $\sin \theta$  و  $\cos \theta$

$$\frac{\sec \theta}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta) \quad (2B)$$

$$\frac{\tan^2 \theta \csc^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta} \quad (2A)$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

تدريب: ص 13-



$$2 - 2 \sin^2 \theta \quad (17)$$

$$\tan \theta \cos^2 \theta \quad (9)$$



## إعادة كتابة الصيغ الرياضية:

3

تحقق من فهمك: ص 12-



3) تعلم أن مقدار العزم (T) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة  $T = Fr \sin \theta$  أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F) ؟

تدرب: ص 13-



20) الشمس: ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل  $e$  يسمى قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة:  $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$ ، حيث  $W$  معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و  $S$  مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربع، و  $A$  المساحة السطحية المعرضة لأشعة الشمس، و  $\theta$  الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

(a) حل المعادلة بالنسبة لـ  $W$ .

(b) أوجد  $W$  إذا كانت  $A = 0.75$ ،  $\theta = 40^\circ$ ،  $e = 0.80$ ،  $S = 1000W/m^2$ . (قرب إلى أقرب جزء من مئة)

مهارات التفكير العليا: ص 14-

32) اكتشف الخطأ: بسط كل من علاء وسامي المقدار:  $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$  كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برر إجابتك.

سامي

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{1} \\ &= \sin^2 \theta \end{aligned}$$

علاء

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \tan^2 \theta + 1 \\ &= \sec^2 \theta \end{aligned}$$

30) مسألة مفتوحة: اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة:  $\tan \theta \sin \theta$

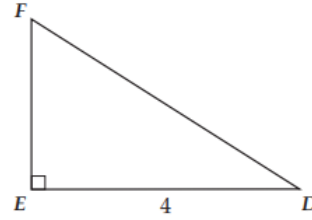
.....

.....

.....

تدرب على الاختبار: ص 14 -

39) في الشكل أدناه، إذا كان  $\cos D = 0.8$ ، فما طول  $\overline{DF}$ ؟



3.2 C

5 A

10 D

4 B

40) إذا كان  $\sin x = m$  و  $0^\circ < x < 90^\circ$ ، فما قيمة  $\tan x$ ؟

$\frac{1}{m^2}$  A

$\frac{m \sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$  B

$\frac{1-m^2}{m}$  C

$\frac{m}{1-m^2}$  D

الواجب:



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تصيلي رياضيات

 /1 العبارة  $\frac{\cos \theta \times \tan \theta}{\cot \theta}$  تكافئ....

- (A)  $\tan \theta$      (B)  $\csc \theta$      (C)  $\cot \theta$      (D)  $\sin \theta \times \cos \theta$

 /2 العبارة:  $(1 - \cot \theta) \sin \theta$  تكافئ.....

- (A)  $\sin \theta \cos \theta$      (B)  $\sin \theta - \cos \theta$      (C)  $\cos^2 \theta$      (D)  $\sec \theta$

 /3 العبارة  $\cot^2 \theta \sin^2 \theta$  تكافئ:.....

- (A)  $\sin^2 \theta$      (B)  $\cos^2 \theta$      (C)  $\tan^2 \theta$      (D)  $\frac{\cos^4 \theta}{\cos^2 \theta}$

 /4 إذا كانت:  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  و  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  فأوجد  $\sin \theta$ 

- (A)  $\frac{1}{2}$      (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$      (C)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$      (D)  $-\frac{1}{2}$

 /5 إذا كانت:  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  و  $\sin \theta = -\frac{1}{3}$  فأوجد  $\cos \theta$ 

- (A)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$      (B)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$      (C)  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$      (D)  $\frac{8}{9}$

 /6 العبارة:  $\cot \theta \cdot \sin \theta$  تكافئ.....

- (A)  $\sin \theta$      (B)  $\sec \theta$      (C)  $\cos \theta$      (D)  $\csc \theta$

 /7 ما قيمة  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$  ؟

- (A)  $-1$      (B)  $0$      (C)  $1$      (D)  $\cos 20$

 /8 إذا كان:  $\cos \theta = \frac{4}{5}$  و  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  فأوجد  $\tan \theta$ 

- (A)  $\frac{4}{3}$      (B)  $\frac{3}{4}$      (C)  $\frac{7}{5}$      (D)  $\frac{1}{5}$

 /9 ما قيمة  $[\cos^2(\cot 75)] + [\sin^2(\cot 75)]$  ؟

- (A)  $1$      (B)  $45$      (C)  $60$      (D)  $75$

## تصيلي رياضيات

 /10 ما العبارة المكافئة لـ  $\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta}$  ؟

- (A)  $\tan \theta$      
  (B)  $\csc \theta$      
  (C)  $\sec \theta$      
  (D)  $\tan^2 \theta$

 /11 العبارة  $\frac{\sec \theta}{\csc \theta}$  تكافئ.....

- (A)  $\tan \theta$      
  (B)  $\cot \theta$      
  (C) 1     
  (D)  $\sec \theta$

 /12 العبارة  $\left(\frac{\cos \theta}{\csc \theta}\right) \tan \theta$  تكافئ.....

- (A)  $\sin^2 \theta$      
  (B)  $\csc^2 \theta$      
  (C)  $\sin \theta$      
  (D)  $\cos \theta$

 /13  $(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)$ 

- (A)  $\sin^2 \theta$      
  (B)  $\cos^2 \theta$      
  (C)  $\sin \theta$      
  (D)  $\cos \theta$

 /14 إذا كانت  $x$  تمثل زاوية حادة و  $\cos 50 = \sin x$  فأوجد قيمة  $x$ 

- (A)  $40^\circ$      
  (B)  $30^\circ$      
  (C)  $60^\circ$      
  (D)  $130^\circ$

 /15 ما أبسط قيمة للمقدار:  $(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$ 

- (A)  $\sin^2 \theta$      
  (B)  $\cos^2 \theta$      
  (C)  $\sin \theta$      
  (D)  $\cos \theta$

 /16 أوجد قيمة:  $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta$  ؟

- (A) 1     
  (B) 0     
  (C) 0.5     
  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

## إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

باستعمال المتطابقات المثلثية الأساسية هناك طريقتان للإثبات

## تحويل طرفي المعادلة

في بعض الأحيان يكون من الأسهل  
أن تحول كل طرف في المتطابقة  
بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة.



## تحويل أحد طرفي المعادلة

بسط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان  
متساويين وفي العادة يكون من الأسهل البدء  
بالطرف الأكثر تعقيدا

تحقق من فهمك : ص 15-


 (1) أثبت صحة المتطابقة،  $\cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$ 

.....

.....

.....

.....

.....

تدريب: ص 17-



أثبت صحة المتطابقات الآتية /

$$\tan \theta = \frac{\sec \theta}{\csc \theta} \quad (7)$$

$$\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1 \quad (1)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تحقق من فهمك : ص 16-



(2) أي مما يأتي يكافئ العبارة ،  $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$  ،  
 $\cot^2\theta$  (A)  
 $\cos^2\theta$  (C)  
 $\tan^2\theta$  (B)  
 $\sin^2\theta$  (D)

تدرّب: ص 17-



(11) أي مما يأتي يكافئ العبارة ،  $\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}$  ،  
 $\sin^2\theta$  (A)  
 $\cos^2\theta$  (C)  
 $\tan^2\theta$  (B)  
 $\csc^2\theta$  (D)

### من الاقتراحات:



- ✓ بسط العبارة بالاستفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية
- ✓ حل أو اضرب كلا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها
- ✓ اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب وجيب التمام فقط ثم بسط كل طرف قدر المستطاع
- ✓ لا تنفذ أي عملية ( جمع , طرح , ضرب , قسمة ) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة , لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات

تحقق من فهمك: ص 17-


 (3) أثبت صحة المتطابقة،  $csc^2\theta - cot^2\theta = cot\theta tan\theta$ 

$csc^2\theta - cot^2\theta = cot\theta tan\theta$ ، أثبت صحة المتطابقة،

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

أثبت صحة المتطابقات الآتية

تدرّب: ص 18-



$$csc\theta - 1 = \frac{cot^2\theta}{csc\theta + 1} \quad (18)$$

$csc\theta - 1 = \frac{cot^2\theta}{csc\theta + 1} \quad (18)$

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

$$sec\theta csc\theta = tan\theta + cot\theta \quad (14)$$

$sec\theta csc\theta = tan\theta + cot\theta \quad (14)$

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

بسط كلا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج (1) أو (-1)

$$cos(-\theta) sec\theta \quad (32)$$

$cos(-\theta) sec\theta \quad (32)$

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

$$cot(-\theta)tan(-\theta) \quad (26)$$

$cot(-\theta)tan(-\theta) \quad (26)$

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

مهارات التفكير العليا: ص 19-

44) اكتشف المختلف: حدد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضع إجابتك:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2\sin^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

تدرب على الاختبار: ص 19-

55) اختياري من متعدد: أي مما يأتي لا يكافئ:  $\cos \theta$  حيث  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  ؟

.....

.....	$\cot \theta \sin \theta$	C	$\frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$	A
.....	$\tan \theta \csc \theta$	D	$\frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta}$	B

56) سؤال ذو إجابة قصيرة: أثبت أن المعادلة التالية تمثل متطابقة:  $\sin^3 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \sin \theta = \sin \theta \cos \theta$

.....

.....

.....

.....

.....

الواجب:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## تحصيلي رياضيات

 /1 العبارة :  $csc^2\theta - cot^2\theta$  تكافئ:.....

- (A) -1      (B) 1      (C)  $\tan\theta$       (D)  $\cot\theta$

 /2 العبارة :  $(1 - \sin^2\theta)\cos^2\theta$  تكافئ:.....

- (A)  $\sin^4\theta$       (B)  $\cos^4\theta$       (C)  $\tan^2\theta$       (D)  $\cot^2\theta$

 /3 العبارة  $(1 - \cot^2\theta)\sin^2\theta$ : تكافئ:.....

- (A)  $\sin^2\theta - \cos^2\theta$       (B)  $\cos^2\theta \sin^2\theta$       (C)  $\tan^2\theta$       (D)  $\sec\theta$

 /4 العبارة :  $cot^2\theta(\tan^2\theta - \sin^2\theta)$  تكافئ:.....

- (A)  $\sin^2\theta$       (B)  $\cos^2\theta$       (C)  $\cos\theta$       (D)  $-\sin^2\theta$

 /5 العبارة :  $cot^2\theta(\tan^2\theta + \sin^2\theta)$  تكافئ:.....

- (A)  $1 + \sin^2\theta$       (B)  $1 + \cos^2\theta$       (C)  $\cos^2\theta$       (D)  $\sin^2\theta$

 /6 قيمة المحددة  $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}$  تساوي:.....

- (A) 0      (B) 1      (C)  $\cos 2x$       (D)  $2\sin^2x$

 /7 العبارة :  $\frac{\sin\theta}{\cot\theta \cdot \sec\theta}$  تكافئ:.....

- (A)  $\sin^2\theta$       (B)  $\cos^2\theta$       (C)  $\cot\theta$       (D)  $\tan\theta$

 /8  $24(csc^2\theta - cot^2\theta)$ 

- (A)  $\cos\theta$       (B)  $\sin\theta$       (C) 24      (D) 12

 /9  $\sqrt{1 - \sin^2\theta} =$ 

- (A)  $|\cos\theta|$       (B)  $\sin\theta$       (C) 3      (D)  $|\cos\theta + \sin\theta|$

 /10 العبارة :  $\sec\theta \csc\theta(1 - \sin^2\theta)$  تكافئ المتطابقة:.....

- (A)  $\cos\theta$       (B)  $\sin\theta$       (C)  $\tan\theta$       (D)  $\cot\theta$

## تحصيلي رياضيات

/11  $\cos(-\theta) \frac{\tan\theta}{\sec\theta}$  تكافئ:.....

- Ⓐ  $\sin\theta \cos\theta$    Ⓑ  $\sin\theta$    Ⓒ  $\sec\theta$    Ⓓ  $\cot\theta$

/12 ما الدالة الزوجية من الدوال التالية؟

- Ⓐ  $f(x) = \cos x$    Ⓑ  $f(x) = \sin x$    Ⓒ  $f(x) = \tan x$    Ⓓ  $f(x) = \csc x$

/13 العبارة  $(\sin\theta + \cos\theta)^2$ :

- Ⓐ  $\sin^2\theta + \cos^2\theta$    Ⓑ  $\cos^2\theta - \sin^2\theta$    Ⓒ  $1 + 2 \sin\theta \cos\theta$    Ⓓ  $3 \sin\theta \cos\theta$

## متطابقات الفرق

$$\begin{aligned}\sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A - B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ \tan(A - B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}\end{aligned}$$



## متطابقات المجموع

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \tan(A + B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}\end{aligned}$$

دون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 20-


 $\cos(-15^\circ)$  (1B)

 $\sin 15^\circ$  (1A)

دون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

تدرّب: ص 22-


 $\tan 195^\circ$  (8)

 $\cos 165^\circ$  (1)

## استعمال متطابقات المجموع والفرق

2

تحقق من فهمك : ص 21-



إذا كانت شدة التيار  $c$  تعطى بالصيغة  $c = 2 \sin 285^\circ t$  فأجب عما يأتي :  
 (2A) أعد كتابة الصيغة ، باستعمال الفرق بين زاويتين

(2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ، لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

تدرّب: ص 22-



(9) يمر تيار كهربائي متردد في دائرة كهربائية ، وتعطى شدة هذا التيار  $c$  بالأمبير بعد  $t$  ثانية بالصيغة  $c = 2 \sin 120^\circ t$   
 (a) أعد كتابة الصيغة ، باستعمال المجموع بين زاويتين

(b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ، لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.



تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضا  
 في إثبات صحة المتطابقات.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

3

تحقق من فهمك : ص 22-



$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} \quad (3B)$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \quad (3A)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \quad (14)$$

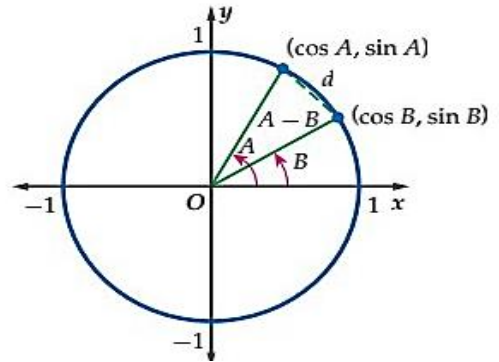
$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta \quad (13)$$

$$\frac{\sin A + \tan \theta \cos A}{\cos A - \tan \theta \sin A} = \tan(A + \theta) \quad (23) \text{ حيث } A, \theta \text{ زاويتان حادتان}$$

29) تبرير: بسط العبارة الآتية ، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right).$$

31) برهان: الشكل أدناه، يبين الزاويتين  $A, B$  في الوضع القياسي في دائرة الوحدة. استعمل قانون المسافة، لإيجاد قيمة  $d$ ، حيث:  
 $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B)$ ,  $(x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$



تدرب على الاختبار: ص 23-

43) ما القيمة الدقيقة للعبارة:  $\sin(60^\circ + \theta)\cos\theta - \cos(60^\circ + \theta)\sin\theta$

$\frac{1}{2}$  A       $\frac{2}{\sqrt{3}}$  C

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  B       $\sqrt{3}$  D

44) سؤال ذو إجابة قصيرة: إذا كان  $\cos \theta + 0.3 = 0$

حيث  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

فأوجد القيمة الدقيقة لـ  $\cot \theta$

الواجب:

## تصيلي رياضيات

 /1 / القيمة  $\cos(30^\circ - \theta) \cos(\theta) = \sin(30^\circ - \theta) \sin(\theta)$  تساوي ....

- (A)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $-\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

 /2 / العبارة:  $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$  تكافئ.....

- (A)  $\cos 4\theta$  (B)  $\sin 4\theta$  (C)  $\cos 2\theta$  (D)  $\sin 2\theta$

 /3 / القيمة الدقيقة لـ  $\sin 15^\circ$  هي :

- (A)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$  (B)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

 /4 / القيمة الدقيقة لـ  $\cos 45^\circ \cos 15^\circ + \sin 45^\circ \sin 15^\circ$  هي :

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D) 1

 /5 / قيمة العبارة:  $\sin 15^\circ \cos 45^\circ + \cos 15^\circ \sin 45^\circ$  هي :

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $-\frac{1}{2}$

 /6 / ما القيمة الدقيقة للعبارة:  $\sin(60^\circ + \theta) \cos \theta - \cos(60^\circ + \theta) \sin 60^\circ$ 

- (A)  $\sqrt{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

 /7 / إذا كان:  $\sin \frac{4}{5}$  فإن  $\tan(90^\circ - \theta) =$ 

- (A)  $\frac{4}{3}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (D)  $\frac{3}{4}$

 /8 / إذا كان:  $\tan \frac{7}{8}$  فإن  $\tan(90^\circ - \theta) =$ 

- (A)  $\frac{7}{8}$  (B)  $\frac{4}{3}$  (C)  $\frac{8}{7}$  (D)  $\frac{3}{5}$

 /9 / إذا كان:  $\sin \theta = 0.21$  فإن  $\sin(\pi - \theta) =$ 

- (A) 0.21 (B) -0.21 (C) 0 (D) 0.79



## المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

1

## متطابقات ضعف الزاوية

 المتطابقات الآتية صحيحة لجميع قيم  $\theta$ 

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1 \\ \cos 2\theta &= 1 - 2\sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

تحقق من فهمك : ص 25 -


 (1) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\sin 2\theta$  إذا كان:  $90^\circ < \theta < 180^\circ, \cos \theta = \frac{-1}{3}$ 

 أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يلي إذا كان:  $90^\circ < \theta < 180^\circ, \cos \theta = \frac{-1}{3}$ 

تحقق من فهمك : ص 26 -


 $\tan 2\theta$  (2B)

 $\cos 2\theta$  (2A)





دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لكل من  $\sin \frac{\theta}{2}$  ,  $\cos \frac{\theta}{2}$ 

تدريب: ص 29-



$$\cos \theta = \frac{3}{5}, 270^\circ < \theta < 360^\circ \quad (3)$$

4 التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

تحقق من فهمك : ص 28-



يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبا بالصيغة:  
 $g = 978 + 5.17 \sin^2 L - 0.014 \sin L \cos L$  حيث  $L$  تمثل زاوية دائرة العرض  
 (4A) بسط هذه العلاقة مستعملا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

 (4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A , واحسب قيمة  $g$  عندما  $L=45^\circ$ 

تدريب: ص 29-



(19) يمر تيار متردد في دائرة كهربية، إذا كانت شدة التيار الكهربائي  $I$  بالأمبير عند الزمن  $t$  ثانية هي  $I_0 \sin t\theta$ ، فإن القدرة  $P$  المرتبطة بالمقاومة  $R$  تعطى بالصيغة:  $P = I_0^2 R \sin^2 t\theta$  عبر عن القدرة بدلالة  $\cos 2\theta$



يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها  
في إثبات صحة المتطابقات أيضا.

إثبات صحة المتطابقة

5

تحقق من فهمك: ص 28-


 (5) أثبت صحة المتطابقة  $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$ 

تدرّب: ص 29-


 (15) أثبت صحة المتطابقة  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$ 

مهارات التفكير العليا: ص 30-

 (27) اكتشف الخطأ: يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لـ:  $\sin 15^\circ$  هل إجابة أي منهما صحيحة؟ برر إجابتك.

سعيد

$$\begin{aligned} \sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \sin(45 - 30) &= \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{4}}{4} \end{aligned}$$

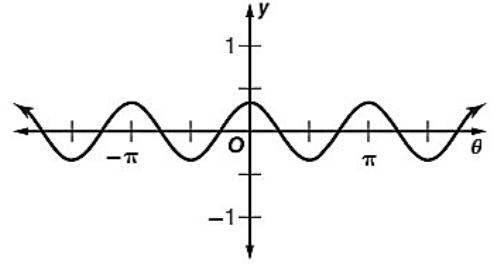
سلمان

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \sin \frac{30}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

43) أوجد القيمة الدقيقة لـ:  $\tan \frac{\theta}{2}$  إذا كان  $0 < \theta < 90^\circ$ ,  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\frac{\sqrt{3}}{3}$  C       $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$  A  
 $\sqrt{3}$  D       $\sqrt{3}-2$  B

44) معادلة الدالة الممثلة بيانياً في الشكل أدناه هي:



- $y = 3 \cos \frac{1}{2} \theta$  (C)       $y = 3 \cos 2\theta$  (A)  
 $y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2} \theta$  (D)       $y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$  (B)

الواجب:

## تحصيلي رياضيات

 /1 إذا علمت أن:  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  و  $\tan \theta = 0$  فإن القيمة الدقيقة لـ  $\tan 2\theta$  تساوي ...

- (A) 0      (B) 1      (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (D) 2

 /2 إذا علمنا أن:  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  و  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، فإن قيمة  $\cos \frac{\theta}{2}$  تساوي ...

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (C)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       (D)  $\frac{3}{4}$

 /3 إذا علمت أن:  $270^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  و  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  فإن قيمة  $\cos 2\theta$  تساوي ...

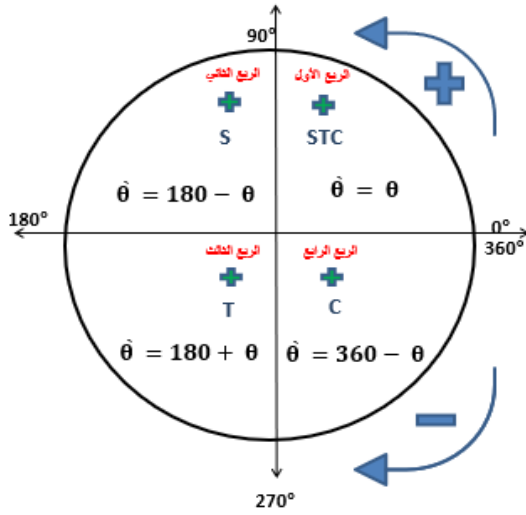
- (A)  $-\frac{24}{7}$       (B)  $-\frac{7}{25}$       (C)  $\frac{7}{25}$       (D)  $-\frac{24}{25}$

 /4 إذا علمت أن:  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  و  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  فإن قيمة  $\sin 2\theta$  تساوي ...

- (A)  $-\frac{24}{7}$       (B)  $-\frac{7}{25}$       (C)  $\frac{7}{25}$       (D)  $-\frac{24}{25}$

 /5 إذا علمنا أن:  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  و  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، فإن قيمة  $\sin \frac{\theta}{2}$  تساوي ...

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (C)  $\frac{1}{2}$       (D)  $\frac{1}{4}$



الحصول على قيم محددة للمتغير تكون عندها المعادلة صحيحة



تحقق من فهمك : ص 33-



1B. حل المعادلة

$$4\sin^2 \theta + 4\cos^2 \theta - 8 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

إذا كانت

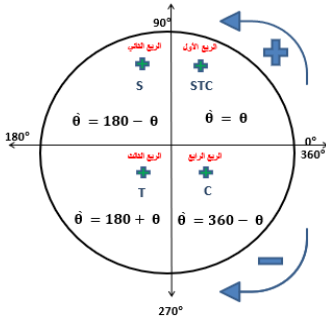
1A. حل المعادلة  $\cos x \sin x = 3 \cos x$ ،

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

إذا كانت:



1) حل المعادلة  $\cos^2 \theta + 2\cos \theta + 1 = 0$ . إذا كانت  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$



2) معادلات مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

2



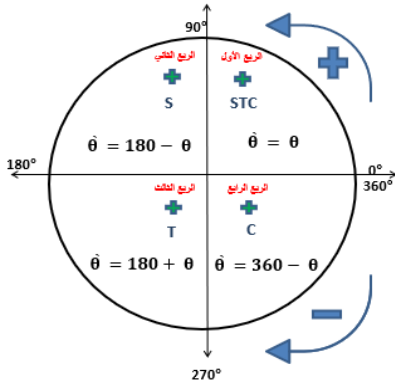
التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات: العبارة  $\pi + 2k\pi$  هي  $\pi$  مضافاً لها مضاعفات  $2\pi$ ، ولذلك ليس من الضروري سرد جميع الحلول

تحقق من فهمك: ص 33 -



2A) حل المعادلة:  $4 \sin x = 2 \sin x + \sqrt{2}$

2B) حل المعادلة :  $2 \sin \theta = -1$  ، لقيم  $\theta$  جميعها إذا كان قياس  $\theta$  بالراديان



تدرب: ص 36-



2) حل المعادلة  $\cos^2 \theta + \cos \theta = 1$  ، إذا كانت  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$





3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة , ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



13) الليل والنهار: إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو  $d$  ، ويمكن تمثيلها بالمعادلة  $d = 3\sin \frac{2\pi}{365}t + 12$  حيث  $d$  عدد الأيام بعد 21 مارس ، فأجب عما يأتي :

(a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة  $10 \frac{1}{2} h$  تماما ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) باستعمال النتيجة في الفرع a ، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار  $10 \frac{1}{2}$  ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبا يوم 22 يونيو؟ فسر إجابتك.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5B) حل المعادلة لقيم  $\theta$  جميعها ، إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات  $\frac{\cos \theta}{\cot \theta} + 2 \sin^2 \theta = 0$

تدرب: ص 36-



14) حل المعادلة لقيم  $\theta$  جميعها ، إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات:  $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$

مهارات التفكير العليا: ص 37-

31) اكتشف الخطأ: حلت كل من هلا وليلى المعادلة:

$$0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ, 2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$$

أي منهما إجابتها صحيحة؟ برر إجابتك.

ليلى

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$$

$$-\sin \theta = -\sin \theta$$

$$2 \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ, 270^\circ$$

هلا

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$$

$$\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta}$$

$$2 \cos \theta = 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ, 300^\circ$$

(47) أي مما يأتي ليس حلاً للمعادلة:  $\sin\theta + \cos\theta \tan^2\theta = 0$  ؟

$2\pi$  C  $\frac{5\pi}{2}$  A

$\frac{3\pi}{4}$  D  $\frac{7\pi}{4}$  B

(48) ما حل المعادلة:  $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$  حيث:  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$  ؟

$210^\circ$  أو  $330^\circ$  C  $30^\circ$  أو  $150^\circ$  A

$240^\circ$  أو  $300^\circ$  D  $60^\circ$  أو  $120^\circ$  B

الواجب:

## تحصيلي رياضيات

 /1 حل المعادلة:  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ,  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  هو ...

- (A)  $60^\circ$       (B)  $120^\circ$  أو  $45^\circ$       (C)  $60^\circ$  أو  $120^\circ$       (D)  $30^\circ$  أو  $150^\circ$

 /2 حل المعادلة:  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  هو ...

- (A)  $30^\circ$       (B)  $30^\circ$  أو  $210^\circ$       (C)  $150^\circ$  أو  $210^\circ$       (D) لا يوجد لها حل

 /3 حل المعادلة:  $3 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta = 0$ ,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  هو ...

- (A)  $30^\circ$       (B)  $90^\circ$       (C)  $30^\circ$  أو  $330^\circ$       (D) لا يوجد لها حل

 /4 أي التالي ليس حلالاً للمعادلة:  $\sin \theta + \cos \theta \tan^2 \theta = 0$  ؟

- (A)  $\frac{5\pi}{2}$       (B)  $\frac{7\pi}{4}$       (C)  $2\pi$       (D)  $\frac{3\pi}{4}$

 /5 حل المعادلة:  $\tan \theta = -1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  هو ...

- (A)  $\frac{7\pi}{4}$       (B)  $\frac{3\pi}{2}$       (C)  $\frac{5\pi}{4}$       (D)  $\frac{\pi}{4}$

 /6 إذا كان  $\sec \theta + 2 = 0$  حيث  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  فإن  $\theta = \dots$ 

- (A)  $60^\circ$       (B)  $90^\circ$       (C)  $120^\circ$       (D)  $240^\circ$

 /7 حل المعادلة:  $\tan \theta - \sec \theta = 0$  هو:

- (A) لا يوجد حل      (B)  $\frac{\pi}{3}$       (C)  $\frac{\pi}{2}$       (D)  $\frac{\pi}{4}$



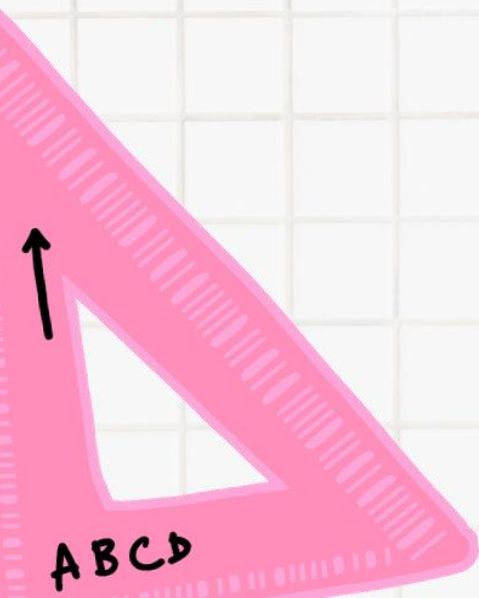
## الفصل الرابع القطع المخروطية

❖ القطع المكافئة

❖ تحديد أنواع القطع المخروطية

❖ القطع الزائدة

❖ القطع الناقصة والدوائر





## الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:

القطع المكافئ المفتوح أفقيا

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

القطع المكافئ المفتوح رأسيا

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

## خصائص القطع المكافئ:

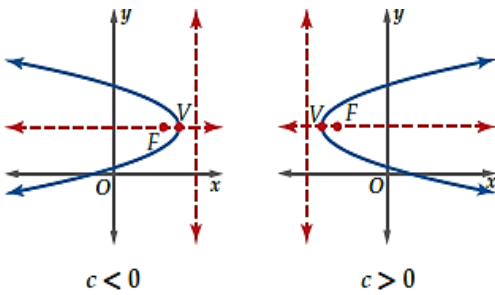
الاتجاه / المنحنى مفتوح أفقيا

 الرأس /  $(h, k)$ 

 البؤرة /  $(h + c, k)$ 

 معادلة محور التماثل /  $y = k$ 

 معادلة الدليل /  $x = h - c$ 

 طول الوتر البؤري /  $|4c|$ 


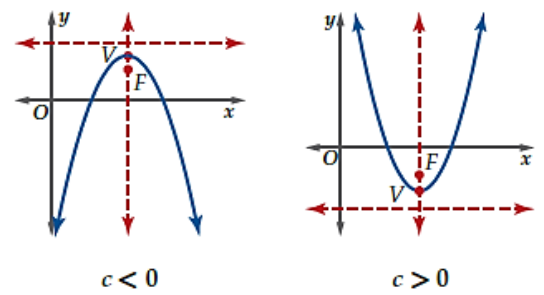
الاتجاه / المنحنى مفتوح رأسيا

 الرأس /  $(h, k)$ 

 البؤرة /  $(h, k + c)$ 

 معادلة محور التماثل /  $x = h$ 

 معادلة الدليل /  $y = k - c$ 

 طول الوتر البؤري /  $|4c|$ 


## اتجاه القطع المكافئ :

يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله مواز لأحد محوري الإحداثيات :

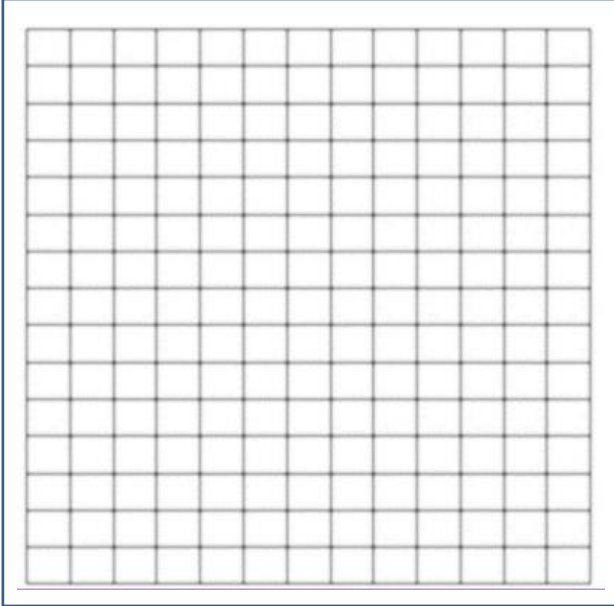
- ✓ مفتوحا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو  $x$ , وكانت  $c \geq 0$ .
- ✓ مفتوحا إلى أسفل إذا كان الحد التربيعي هو  $x$ , وكانت  $c < 0$ .
- ✓ مفتوحا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو  $y$ , وكانت  $c > 0$ .
- ✓ مفتوحا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو  $y$ , وكانت  $c < 0$ .



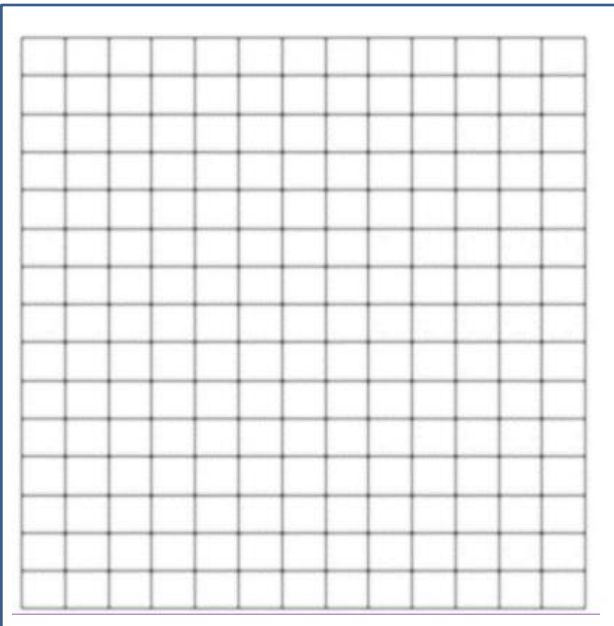


## 1 تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانياً:

 1A حدد خصائص القطع المكافئ ثم مثله بيانياً:  $8(y + 3) = (x - 4)^2$  تحقق من فهمك: ص 48-

 $c =$ 
 $k =$ 
 $h =$ 


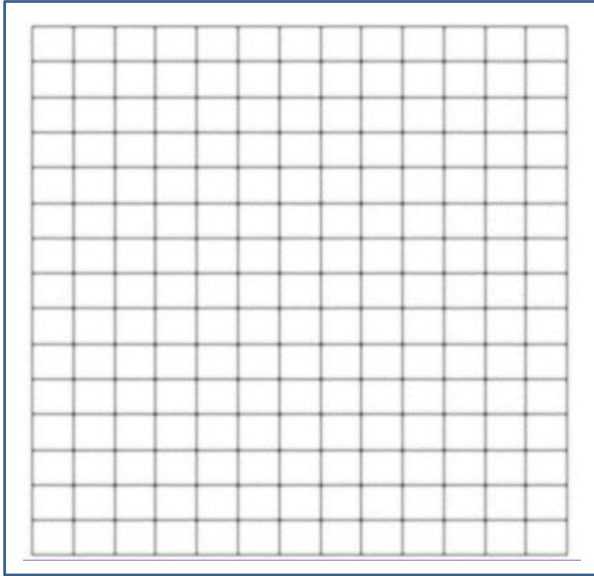
الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة الدليل
	معادلة محور التماثل
	طول الوتر البؤري

 1B حدد خصائص القطع المكافئ ثم مثله بيانياً:  $2(x + 6) = (y + 1)^2$ 
 $c =$ 
 $k =$ 
 $h =$ 


الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة الدليل
	معادلة محور التماثل
	طول الوتر البؤري

(1) حدد خصائص القطع المكافئ ثم مثله بيانياً:  $(x - 3)^2 = 12(y - 7)$ 

تدرّب: ص 52 -


 $c =$ 
 $k =$ 
 $h =$ 


الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة الدليل
	معادلة محور التماثل
	طول الوتر البؤري


 لتحديد خصائص القطع المكافئ نعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل **إكمال المربع**

خصائص القطع المكافئ:

2

تحقق من فهمك: ص 48 -


 (2) عد إلى فقرة لماذا؟ في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة  $x^2 = 44.8(y - 6)$ ، حيث  $-5 \leq x \leq 5$  إذا كانت  $x, y$  بالأقدام، فإين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

تدرّب: ص 52 -


 (7) صمم بدر لوح تزلج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته  $x^2 = 8(y - 2)$  حيث  $x, y$  بالأقدام، احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟

## كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

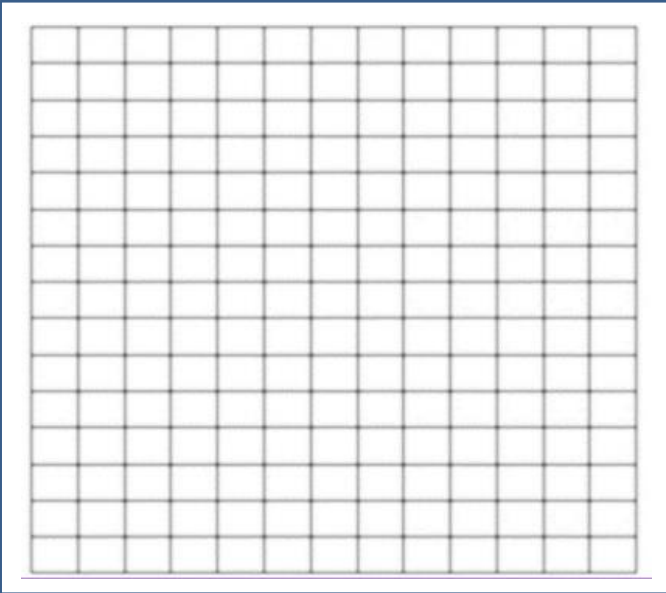
3

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ  
ثم حدد خصائصه ومثل منحناه بيانيا

تحقق من فهمك: ص 49-



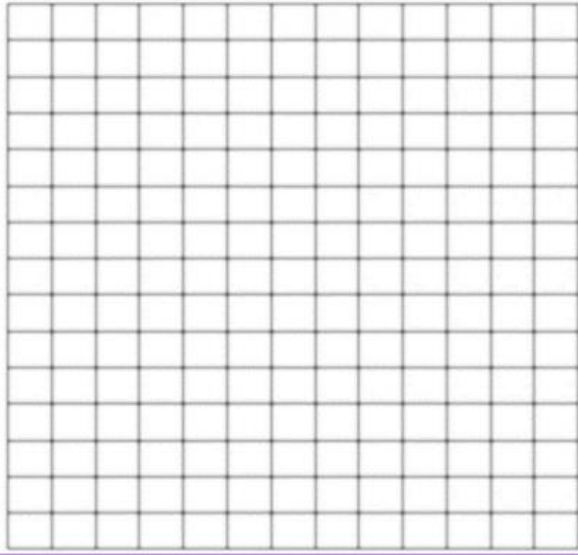
$$x^2 - 4y + 3 = 7 \quad (3A)$$

 $c =$ 
 $k =$ 
 $h =$ 


## الخصائص

الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة الدليل
	معادلة محور التماثل
	طول الوتر البؤري

$$3y^2 + 6y + 15 = 12x \quad (3B)$$

**c =**
**k =**
**h =**


الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة الدليل
	معادلة محور التماثل
	طول الوتر البؤري

تدرّب: ص 52 -



$$3x^2 + 72 = -72y \quad (11)$$

.....

.....

.....

.....

.....

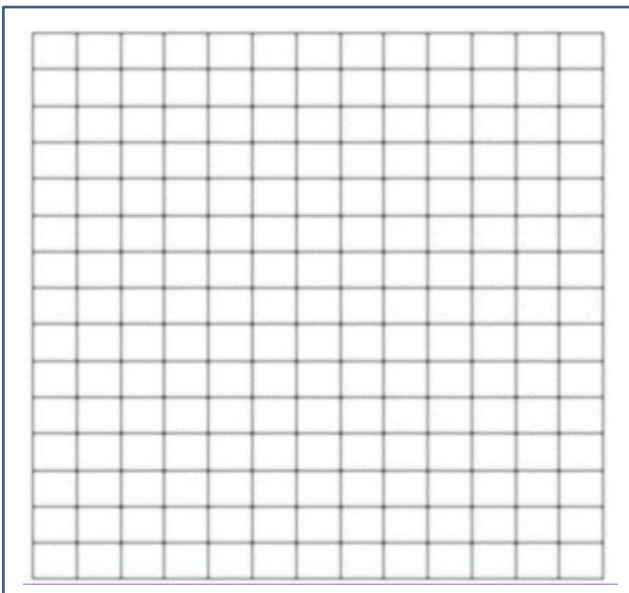
.....

.....

.....

.....

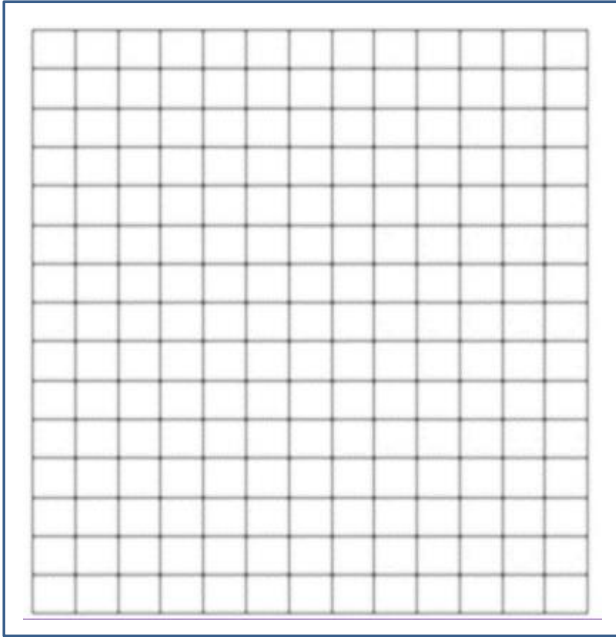
.....

**c =**
**k =**
**h =**


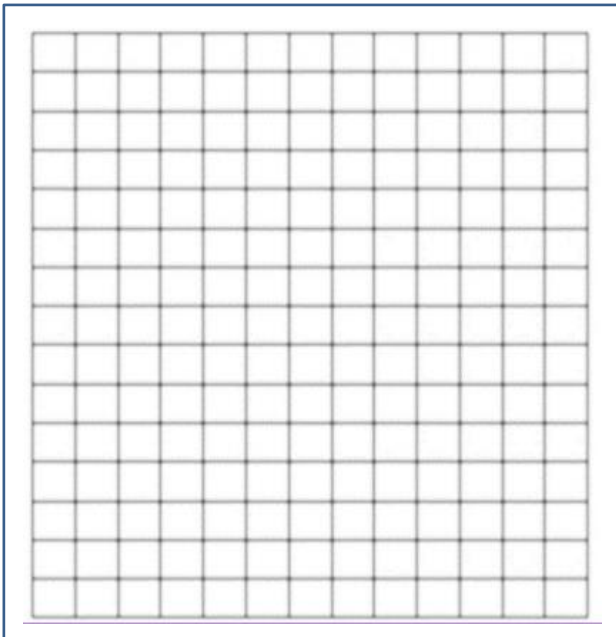
الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة الدليل
	معادلة محور التماثل
	طول الوتر البؤري



4C) البؤرة (-4, -3) والمنحنى مفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة (5, -10)



4D) البؤرة (5, -1) والمنحنى مفتوح إلى اليمين ويمر بالنقطة (7, -8)





$$x = 5 - \frac{y^2}{4}, (1, -4) \quad (5B)$$

تدرب: ص 52-



$$(x + 7)^2 = \frac{-1}{2} (y - 3), (-5, 5) \quad (24)$$

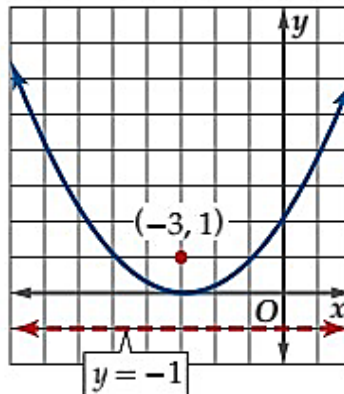
مهارات التفكير العليا: ص 53-

(36) اكتشف الخطأ: مثلت صفيية وميمونة المنحنى:

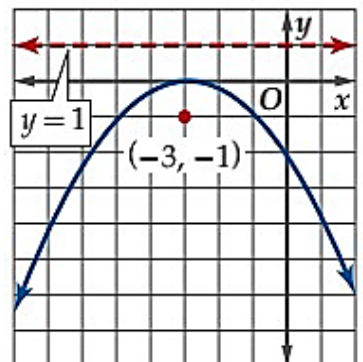
$$x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$$

بيانيا كما هو موضح أدناه. فأى التمثيلين صحيح؟ فسر تبرك ..

ميمونة



صفيية



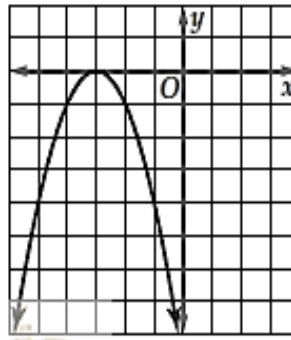


(49) إذا كان  $x$  عددا موجبا فإن  $x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$  تساوي:

A  $x^{\frac{-1}{4}}$  C  $x^{\frac{3}{4}}$

B  $\sqrt{x^3}$  D  $\sqrt{x^5}$

(50) ما الدالة الرئيسية ( الأم ) للدالة الموضح منحناها جانبا؟



A  $y = x$

B  $y = |x|$

C  $y = \sqrt{x}$

D  $y = x^2$

الواجب:

## تحصيلي رياضيات

 1/ ما اتجاه القطع المكافئ:  $y^2 = 8(x-5)$  ؟

- (A) يمين (B) يسار (C) أسفل (D) أعلى

 2/ ما إحداثيات بؤرة القطع المكافئ:  $y^2 = 4x$  ؟

- (A) (0,1) (B) (1,0) (C) (0,4) (D) (4,0)

 3/ ما معادلة القطع المكافئ: الذي بؤرته (2, 5)، ودليله  $x = -3$  ؟

- (A)  $(x + \frac{1}{2})^2 = -10(y - 5)$  (B)  $(x + \frac{1}{2})^2 = 10(y - 5)$  (C)  $(y - 5)^2 = -10(x - \frac{1}{2})$  (D)  $(y - 5)^2 = 10(x - \frac{1}{2})$

 4/ ما اتجاه القطع المكافئ  $x^2 = 3(y - 2)$  ؟

- (A) يمين (B) يسار (C) أسفل (D) أعلى

 5/ ما اتجاه القطع المكافئ الذي بؤرته (5,3)، ودليله  $y = 1$  ؟

- (A) يمين (B) يسار (C) أسفل (D) أعلى

 6/ ما اتجاه القطع المكافئ الذي رأسه (1,2)، ودليله  $y = 5$  ؟

- (A) يمين (B) يسار (C) أسفل (D) أعلى

 7/ ما إحداثيات رأس القطع المكافئ:  $(x - 2)^2 = 8(y + 2)$  ؟

- (A) (-2, -2) (B) (-2, 2) (C) (2, -2) (D) (2, 2)

 8/ ما معادلة محور تماثل القطع المكافئ:  $x^2 - 2x + y = 16$  ؟

- (A)  $x = -17$  (B)  $x = -1$  (C)  $x = 1$  (D)  $x = 17$

 9/ طول الوتر البؤري للقطع المكافئ:  $(y - 5)^2 = 8(x - 3)$  ؟

- (A) 3 وحدات (B) 5 وحدات (C) 8 وحدات (D) 10 وحدات

## تحصيلي رياضيات

 /10 معادلة محورتماثل القطع المكافئ:  $(y - 4)^2 = -6(x + 1)$  ؟

- (A)  $y = 1$       (B)  $y = 4$       (C)  $x = 1$       (D)  $x = 4$

 /11 ما إحداثيات رأس القطع المكافئ:  $2(x - 2)^2 = (y + 3)$  ؟

- (A)  $(-3, 2)$       (B)  $(-2, 3)$       (C)  $(2, -3)$       (D)  $(3, -2)$

 /12 ما معادلة القطع المكافئ: الذي رأسه  $(0, 0)$ ، ومحوره منطبق على محور  $y$  ويمر بالنقطة  $(4, -2)$  ؟

- (A)  $x^2 = 8y$       (B)  $y^2 = 8x$       (C)  $x^2 + 8y = 0$       (D)  $y^2 + 8x = 0$

 /13 طول الوتر البؤري للقطع المكافئ:  $(y - 5)^2 = -6(x - 2)$  ؟

- (A)  $\frac{6}{4}$       (B)  $-\frac{3}{2}$       (C)  $6$       (D)  $-6$

 /14 ما اتجاه القطع المكافئ  $x^2 = 8(y - 8)$  ؟

- (A) يمين      (B) يسار      (C) أسفل      (D) أعلى

 /15 منحنى القطع المكافئ الذي معادلته  $-6(y + 1) = (x - 2)^2$  يكون مفتوحا

- (A) أفقيا لليسار      (B) أفقيا لليمين      (C) رأسيا لأعلى      (D) رأسيا لأسفل

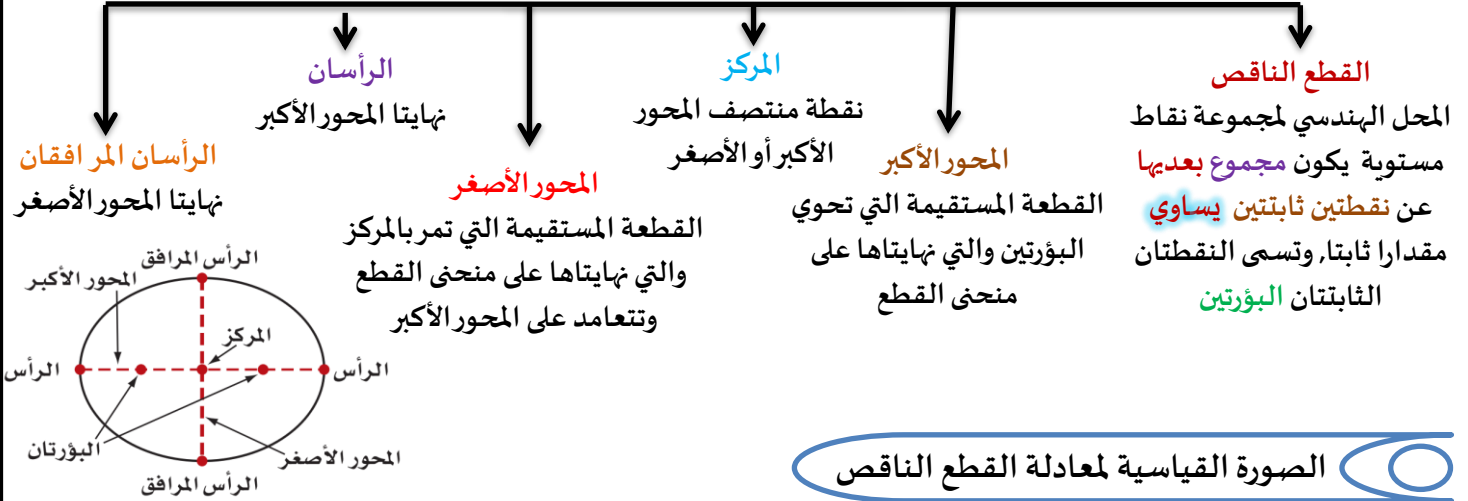
 /16 معادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته  $(x - 6)^2 = -4(y - 15)$  ؟

- (A)  $x = 16$       (B)  $x = -16$       (C)  $y = 16$       (D)  $y = -16$

 /17 القطع الذي دليله  $x = 1$ ، والرأس  $(3, -1)$  يكون مفتوحا لـ:

- (A) الأعلى      (B) الأسفل      (C) اليمين      (D) اليسار

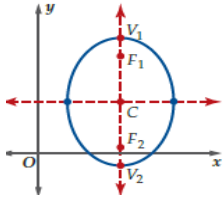
## تحليل القطع الناقص وتمثيله بيانيا



## الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص

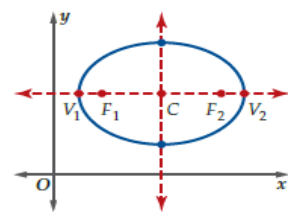
**القطع الناقص رأسي**

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



**القطع الناقص أفقيا**

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



المحور الأكبر رأسي	الاتجاه
(h, k)	المركز
(h, k ± c)	البؤرتان
(h, k ± a)	الرأسان
(h ± b, k)	الرأسان المرافقان
X=h وطوله 2a	المحور الأكبر
Y=k وطوله 2b	المحور الأصغر
$c^2 = a^2 - b^2$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	العلاقة بين a, b, c
2c	طول البعد البؤري

المحور الأكبر أفقيا	الاتجاه
(h, k)	المركز
(h ± c, k)	البؤرتان
(h ± a, k)	الرأسان
(h, k ± b)	الرأسان المرافقان
Y=k وطوله 2a	المحور الأكبر
X=h وطوله 2b	المحور الأصغر
$c^2 = a^2 - b^2$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	العلاقة بين a, b, c
2c	طول البعد البؤري

**البعد البؤري:**

المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري .  
 لرسم القطع الناقص نعين نقطتا مساعدة  
 وهي التي تبعد مسافة  $\frac{b^2}{a^2}$  أعلى وأسفل كل  
 من البؤرتين


**اتجاه القطع الناقص :**

➤ إذا كان  $(x-h)^2$  مقسوما على  $a^2$  في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيا .  
 ➤ أما إذا كان  $(y-k)^2$  مقسوما على  $a^2$  فإن المحور الأكبر يكون رأسي ، حيث  $a^2 > b^2$  دائما.

## 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيا

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$
 (1A) حدد خصائص القطع الناقص ثم مثله بيانيا

تحقق من فهمك : ص 56-



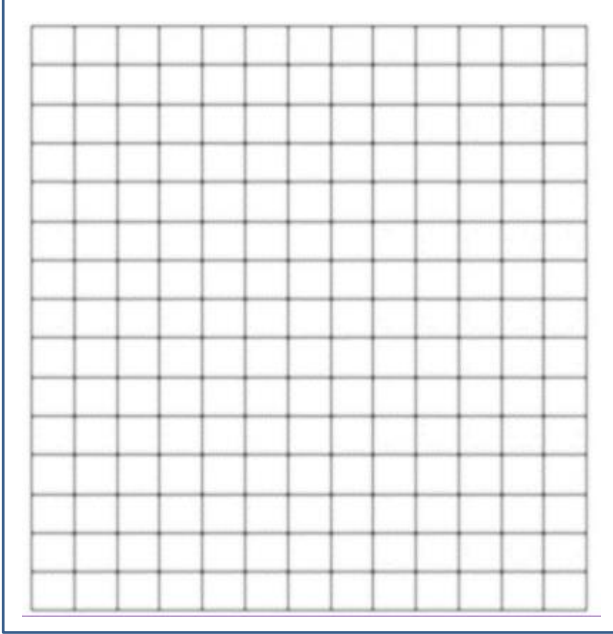
h =

k =

a =

b =

c =



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	الرأسان المرافقان
	المحور الأكبر وطوله
	المحور الأصغر وطوله
	العلاقة بين a, b, c
	طول البعد البؤري

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$$
 (1B) حدد خصائص القطع الناقص ثم مثله بيانيا

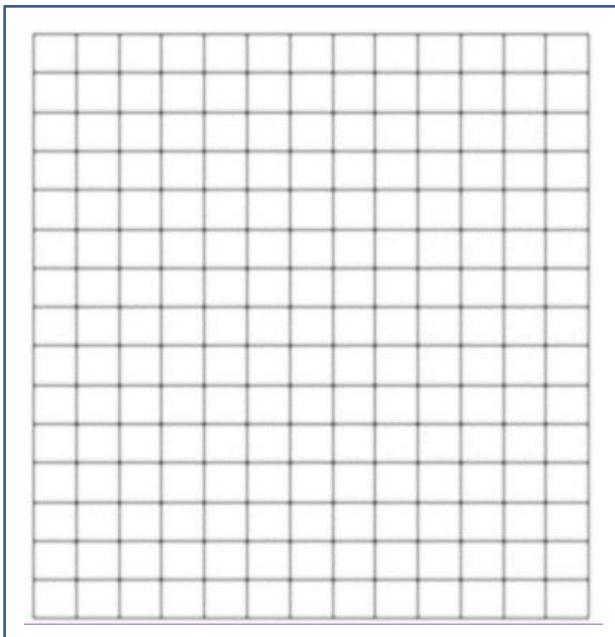
h =

k =

a =

b =

c =



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	الرأسان المرافقان
	المحور الأكبر وطوله
	المحور الأصغر وطوله
	العلاقة بين a, b, c
	طول البعد البؤري





## الاختلاف المركزي

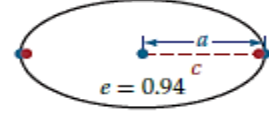
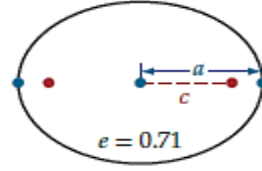
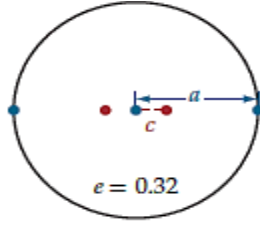
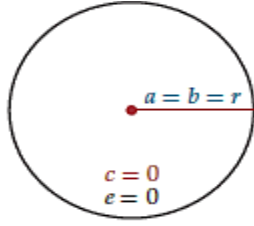
3

$$e = \frac{c}{a}$$

 هو نسبة  $c$  إلى  $a$ 

 حيث  $c$  هي المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص

تقع قيمته دائما بين 0,1 وتحدد مدى دائرية أو اتساع القطع الناقص



تحقق من فهمك : ص 56-



حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

$$\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1 \quad (3A)$$

$$\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1 \quad (3B)$$

$$\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1 \quad (11)$$

تدريب: ص 60-





4 استعمال الاختلاف المركزي

تحقق من فهمك : ص 58-

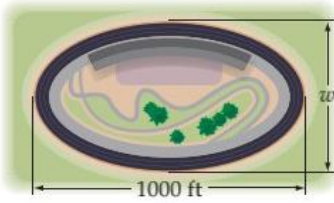


4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 فإذا كان عمق العين 25 mm فما ارتفاعها؟

تدرب: ص 60-



14) يوضح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 (A) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟



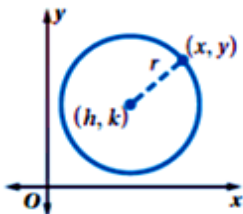
(B) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار؟

5 الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

معادلة دائرة مركزها  $(h, k)$

وطول نصف قطرها  $r$

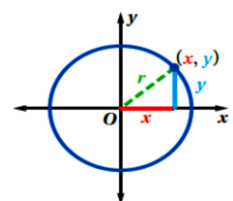
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

وطول نصف قطرها  $r$

$$(x)^2 + (y)^2 = r^2$$



تحقق من فهمك : ص 59-



5A) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (0,0) ونصف قطرها 3.

5B) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (5,0) وقطرها 10.

تدرب: ص 60-



16) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (-4,-3) وقطرها 12.

17) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 7.

### 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

نوجد نصف القطر باستعمال قانون المسافة بين نقطتين

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



نوجد المركز باستعمال قانون نقطة المنتصف

$$(h, k) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

تحقق من فهمك : ص 59-



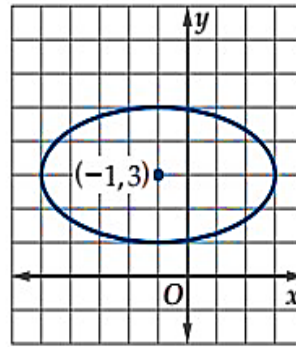
6) أوجد معادلة دائرة ، إذا كان طرفا قطر فيها (1,5) , (3,-3)


 18) أوجد معادلة دائرة ، إذا كان طرفا قطر فيها  $(2, -4)$  ,  $(2, 1)$ 

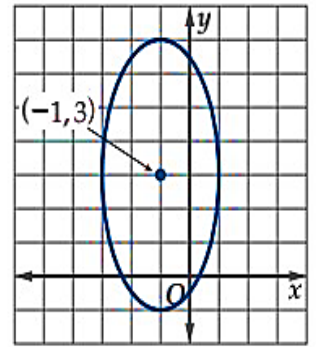
مهارات التفكير العليا: ص 61-

 37) اكتشف الخطأ: مثل خالد وياسر بيانيا القطع الناقص الذي مركزه  $(-3, 1)$  وطول محوره الأكبر 8 وحدات ، وطول محوره الأصغر 4 وحدات ، كما في الشكلين أدناه . هل إجابة أي منهما صحيحة؟

ياسر



خالد



تدريب على الاختبار: ص 61-

 53) تبعد النقطة  $k$  مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة  $M$  ، نصف قطرها 6 وحدات . فإذا رسم مماس من  $k$  إلى الدائرة فما المسافة من  $k$  إلى نقطة التماس ؟

10 C

6 A

 $2\sqrt{34}$  D

8 B

54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي . أبعاد اللوحة 27 بوصة و15 بوصة . أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة ؟

$$\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1 \quad \text{C} \qquad \frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1 \quad \text{A}$$

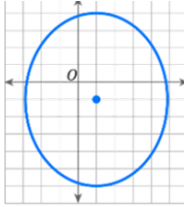
$$\frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1 \quad \text{D} \qquad \frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1 \quad \text{B}$$

الواجب:

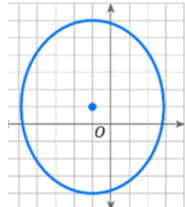
## تصيلي رياضيات

 /1 في القطع الناقص:  $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-12)^2}{9} = 1$  طول المحور الأكبر...

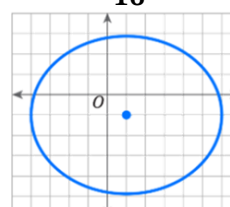
- (A) 4 وحدات (B) 6 وحدات (C) 12 وحدة (D) 18 وحدة

 /2 التمثيل البياني للقطع الذي معادلته:  $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$  هو...


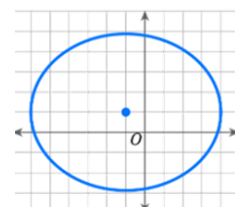
(D)



(C)



(B)



(A)

 /3 مركز القطع الناقص الذي معادلته:  $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$  هو...

- (A) (5, 7) (B) (7, 5) (C) (-5, -7) (D) (-7, -5)

 /4 ما الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته:  $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ 

- (A) e = 0.66 (B) e = 1 (C) e = 1.25 (D) e = 1.66

/5 قطع ناقص المسافة بين بؤرتيه 10 وحدات وطول محوره الأكبر 16 وحدة فإن اختلافه المركزي e يساوي ....

- (A)
- $\frac{5}{8}$
- (B)
- $\frac{8}{5}$
- (C) 6 (D) 10

/6 القطع الذي اختلافه المركزي e = 0 عبارة عن .....

- (A) قطع مكافئ (B) قطع زائد (C) دائرة (D) مربع

/7 في القطع الناقص قيمة الاختلاف المركزي تنحصر بين 0 و.....

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

 /8 في القطع الناقص:  $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$  ، طول المحور الأصغر هو...

- (A) 3 وحدات (B) 5 وحدات (C) 6 وحدات (D) 10 وحدات

/9 أي القطوع الناقصة التالية مركزه النقطة: (3, 1)؟

- (A)
- $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$
- (B)
- $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = 1$
- (C)
- $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} = 1$
- (D)
- $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$

## تحصيلي رياضيات

/10 إحداثيا الرأسان المرافقان للقطع الناقص :  $\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$

- (A)  $(6, -3 \pm 4)$       (B)  $(6 \pm 4, -3)$       (C)  $(6, -3 \pm 3)$       (D)  $(6 \pm 3, -3)$

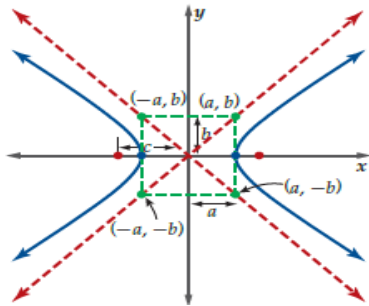
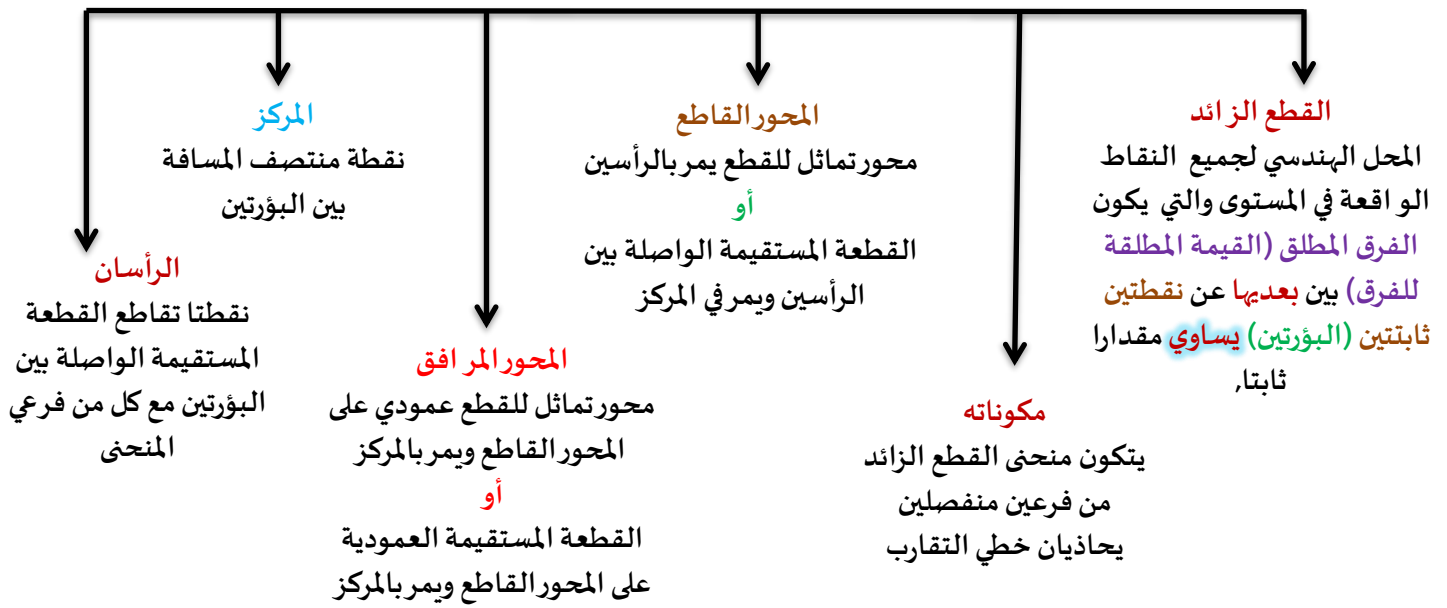
/11 مركز القطع الناقص الذي معادلته:  $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-5)^2}{2} = 1$  هو...

- (A)  $(-1, -5)$       (B)  $(1,5)$       (C)  $(-1,5)$       (D)  $(1, -5)$

/12 ما مركز الدائرة التي معادلتها:  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$  ؟

- (A)  $(-2, -1)$       (B)  $(-2,1)$       (C)  $(2, -1)$       (D)  $(2,1)$

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيا



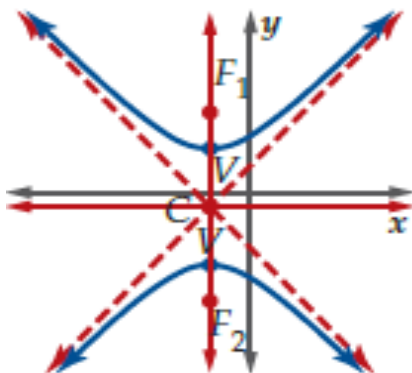
يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه ، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما  $2b$  ، ويمسان القطع عند رأسيه ، وضلعاه الآخران طول كل منهما  $2a$  ، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب  $2c$ .



الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد

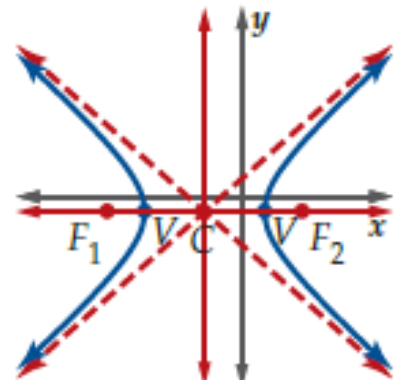
**القطع الزائد رأسيا**

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$



**القطع الزائد أفقيا**

$$\frac{(x - k)^2}{a^2} - \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1$$



## 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاه على الصورة القياسية

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

تحقق من فهمك : ص 65-



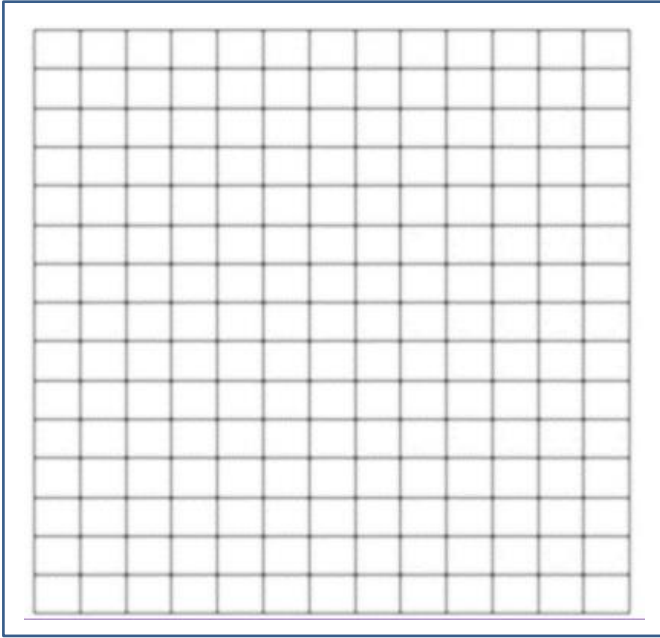
h =

k =

a =

b =

c =



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خطا التقارب
	العلاقة بين a , b, c
	طول البعد البؤري

$$\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$$

1B حدد خصائص القطع الزائد ثم مثله بيانيا:

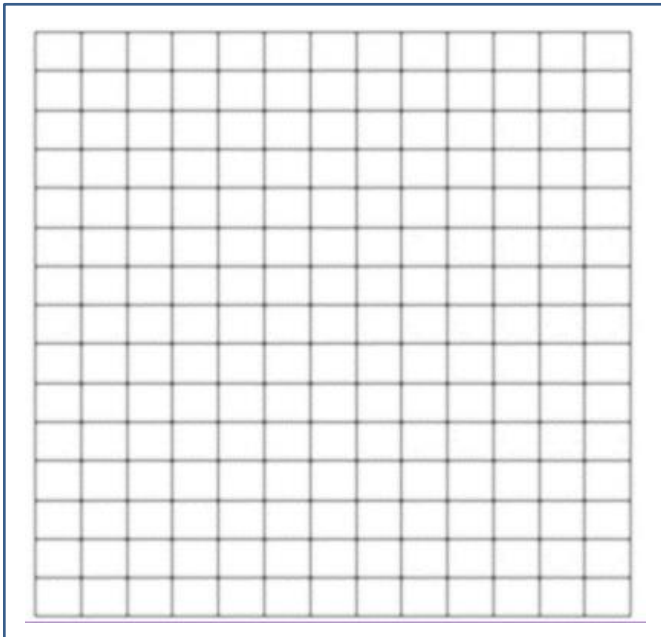
h =

k =

a =

b =

c =

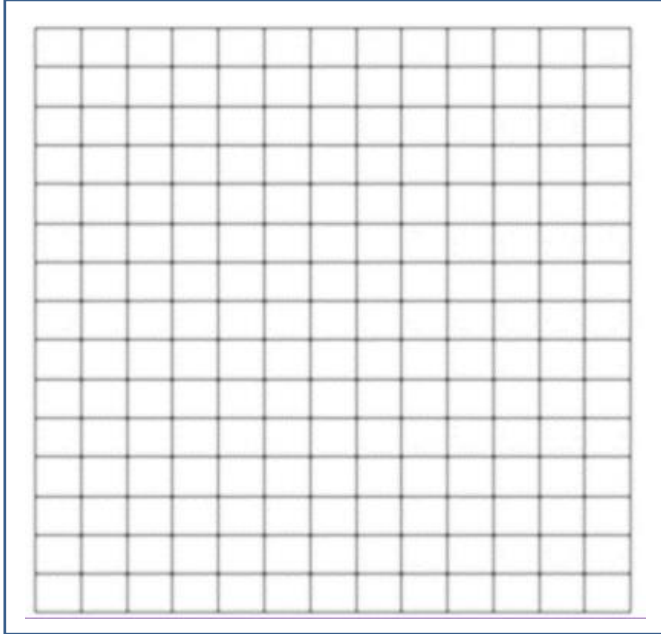


	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خطا التقارب
	العلاقة بين a , b, c
	طول البعد البؤري



تدرّب: ص 69-

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1 \quad (3)$$

 **$h =$** 
 **$k =$** 
 **$a =$** 
 **$b =$** 
 **$c =$** 


	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خط التقارب
	العلاقة بين $a, b, c$
	طول البعد البؤري

## 2 كتابة معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية

2



تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وتحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف وقانون المسافة

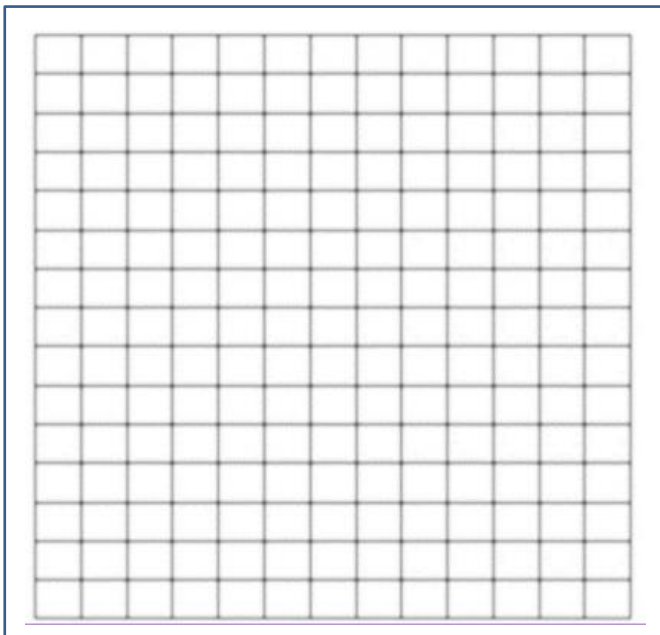
تحقق من فهمك : ص 66-



اكتب معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية في كل مما يأتي ثم حدد خصائصه ومثل منحناه بيانيا

$$4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68 \quad (2A)$$

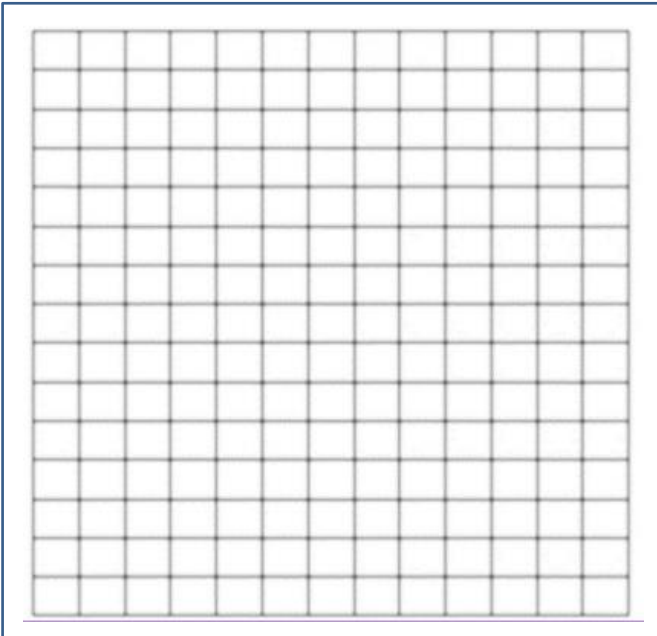
معادلة القطع الزائد هي:

 $h =$ 
 $k =$ 
 $a =$ 
 $b =$ 
 $c =$ 


	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خطا التقارب
	العلاقة بين $a, b, c$
	طول البعد البؤري

$$2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0 \quad (2B)$$

معادلة القطع الزائد هي:

 $h =$ 
 $k =$ 
 $a =$ 
 $b =$ 
 $c =$ 


	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خط التقارب
	العلاقة بين $a, b, c$
	طول البعد البؤري



$$-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28 \quad (9)$$

معادلة القطع الزائد هي:

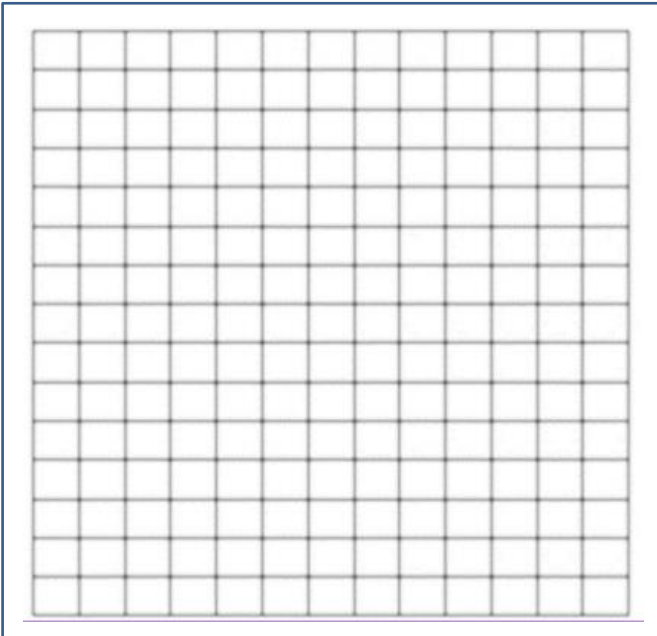
$h =$

$k =$

$a =$

$b =$

$c =$



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خط التقارب
	العلاقة بين $a, b, c$
	طول البعد البؤري





$$\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1 \quad (4B)$$

تدرّب: ص 70-



$$\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1 \quad (21)$$

تطبيقات على القطع الزائد

5

تحقق من فهمك: ص 69-



5) تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلا بحريا (A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين  $(100, 0)$ ،  $(-100, 0)$

(B) أوجد إحداثي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثيها  $(100, 0)$



28) يأخذ برج (كوب بورت) في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق . افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

(A) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8m ، فما معادلة القطع الزائد؟



(B) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32m ، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76m ، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة ؟

36) تبرير: افترض أنك أعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية:

رأسين , بؤرتين , المحور القاطع , المحور الأفقي , خطي تقارب.

هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع دائما أو أحيانا أو غير ممكن أبدا ؟



47) مراجعة: يمثل منحنى  $1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2$  قطعاً زائداً .

ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

A  $y = \frac{4}{5}x$  ,  $y = -\frac{4}{5}x$

B  $y = \frac{5}{4}x$  ,  $y = -\frac{5}{4}x$

C  $y = \frac{1}{4}x$  ,  $y = -\frac{1}{4}x$

D  $y = \frac{1}{5}x$  ,  $y = -\frac{1}{5}x$

48) سؤال ذو إجابة قصيرة: أوجد معادلتا خطي التقارب للقطع الزائد

الذي معادلته:  $1 = \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1}$

الواجب:

## تحصيلي رياضيات

 /1 في القطع الزائد  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  طول المحور القاطع: ...

- (A) 3 وحدات      (B) 4 وحدات      (C) 6 وحدة      (D) 8 وحدة

 /2 مركز القطع الزائد  $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$  هو النقطة.....

- (A) (5, 4)      (B) (4, 5)      (C) (-5, 4)      (D) (5, -4)

 /3 المحور القاطع للقطع الزائد  $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y-7)^2}{16} = 1$  هو: ...

- (A)  $x = 5$       (B)  $x = 7$       (C)  $y = 5$       (D)  $y = 7$

 /4 ما معادلة خطي التقارب للقطع الزائد  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  ؟

- (A)  $y = \pm 4x$       (B)  $y = \pm \frac{3}{4}x$       (C)  $y = \pm \frac{4}{3}x$       (D)  $y = \pm \frac{9}{16}x$

/5 أي القطوع الزائدة التالية طول محوره المرافق 10 وحدات؟

- (A)  $\frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$       (B)  $\frac{y^2}{25} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$       (C)  $\frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{10} = 1$       (D)  $\frac{y^2}{10} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$

 /6 ما معادلة خطي التقارب للقطع الزائد:  $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$ 

- (A)  $(y-1) = \pm \frac{9}{16}(x+2)$       (B)  $(y-1) = \pm \frac{16}{9}(x+2)$       (C)  $(y-1) = \pm \frac{3}{4}(x+2)$       (D)  $(y-1) = \pm \frac{4}{3}(x+2)$

 /7 الاختلاف المركزي للقطع الزائد:  $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right) = 1$  يساوي ...

- (A)  $\frac{\sqrt{13}}{2}$       (B)  $\frac{\sqrt{31}}{2}$       (C)  $\frac{2}{\sqrt{13}}$       (D)  $\frac{2}{\sqrt{31}}$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

حيث A, B, C لا تساوي جميعها أصفارا

ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصورة القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت  $B=0$

تحقق من فهمك : ص 72 -



1) اكتب المعادلة  $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$  على الصورة القياسية ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله

تدرب: ص 74 -



1) اكتب المعادلة  $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$  على الصورة القياسية ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله

2) اكتب المعادلة  $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$  على الصورة القياسية ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله



تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

قطع زائد  
 $B^2 - 4ac > 0$

قطع مكافئ  
 $B^2 - 4ac = 0$

قطع ناقص  
 $B^2 - 4ac < 0$   
 $B \neq 0, A \neq C$

دائرة  
 $B^2 - 4ac < 0$   
 $B = 0, A = C$

تحقق من فهمك : ص 73 -



حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، دون كتابتها على الصورة القياسية

$$8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0 \quad (2A)$$

$$3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0 \quad (2B)$$

$$3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0 \quad (2C)$$



حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، دون كتابتها على الصورة القياسية

$$4x^2 - 5y = 9x - 12 \quad (5)$$

$$5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2 \quad (6)$$

$$8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0 \quad (7)$$

مهارات التفكير العليا: ص 75-

21) تبرير: ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائما أو صحيحة أحيانا أو غير صحيحة أبدا  
( عندما يكون القطع رأسيا وتكون  $A=C$  فإن القطع دائرة) ؟



## تحصيلي رياضيات

1/ ما نوع القطع الذي تمثله المعادلة :  $4x^2 - 3y^2 + 8y - 12 - 2x + 4y = 0$

- (A) قطع مكافئ (B) قطع زائد (C) قطع ناقص (D) دائرة

2/ أي التالي يمثل قطعاً ناقصاً؟

- (A)  $25x^2 - 25y^2 - 20x + 10y + 457 = 0$  (B)  $25x^2 + y^2 - 19x + 22y + 457 = 0$   
(C)  $25x^2 - y^2 - 19x + 22y + 457 = 0$  (D)  $25x^2 - 19x + 22y + 457 = 0$

3/ ما قيمة C التي تجعل منحنى المعادلة :  $4x^2 + Cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$  دائرة؟

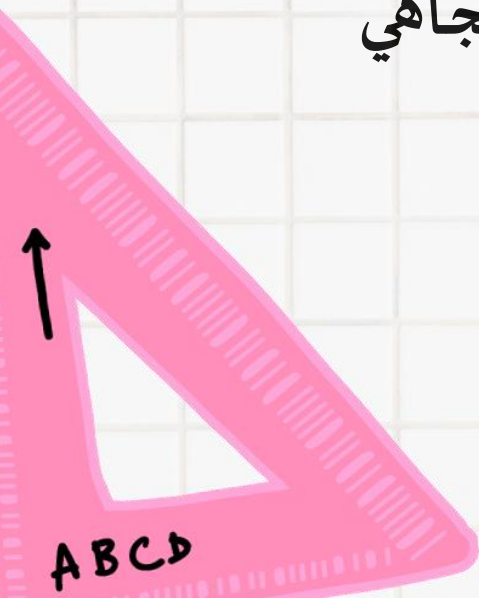
- (A) -8 (B) -4 (C) 4 (D) 8



## الفصل الخامس

### المتجهات

- ❖ مقدمة في المتجهات
- ❖ المتجهات في المستوى الاحداثي
- ❖ الضرب الداخلي
- ❖ المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
- ❖ الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء





1 تحديد الكميات المتجهة:

الكميات

1 كمية قياسية : لها مقدار فقط

2 كمية متجهة : لها مقدار واتجاه

حدد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية ( العددية ) في كل مما يلي:

تحقق من فهمك : ص 85-



1A) تسير سيارة بسرعة 60mi/h ، وبزاوية 60° جهة الجنوب الشرقي.

1B) هبوط مضلي رأسيا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi/h.

1C) طول قطعة مستقيمة 5 cm.

حدد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية ( العددية ) في كل مما يلي:

تدرب: ص 91-

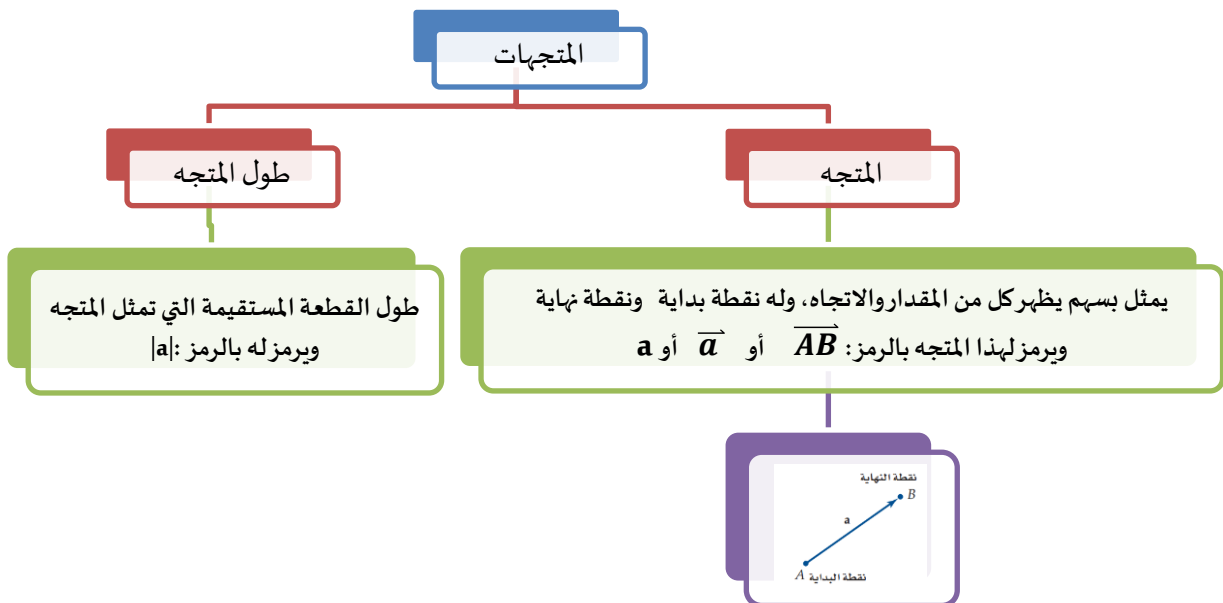


2) مساحة مربع 20cm<sup>2</sup>

3) يركض غزال بسرعة 15m/s ، باتجاه الغرب.

4) المسافة التي تقطعها كرة قدم 5m.

6) رمي حجر رأسيا إلى أعلى بسرعة 50 ft/s .



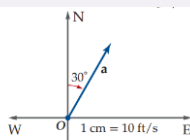
## تمثيل المتجه هندسيا

2

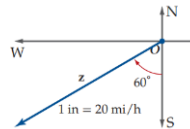
## اتجاه المتجه

## الاتجاه الحقيقي

نبدأ قياس الزاوية من الشمال N نزولا  
(مع عقارب الساعة)  
يعطى قياس الزاوية بثلاث أرقام

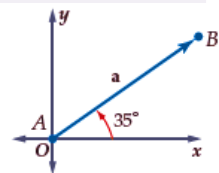

 الاتجاه الرباعي  $\phi$ 

نبدأ قياس الزاوية من الخط الرأسى  
(S أو N) باتجاه الشرق E أو الغرب W  
قياسها بين  $0^\circ$  و  $90^\circ$   
وتكتب الزاوية بين حرفين الاتجاه مثل  
 **$S35^\circ E$** :



## اتجاه أفقي (قياسي)

نبدأ قياس الزاوية من محور  
السينات الموجبة لأعلى  
(عكس عقارب الساعة)



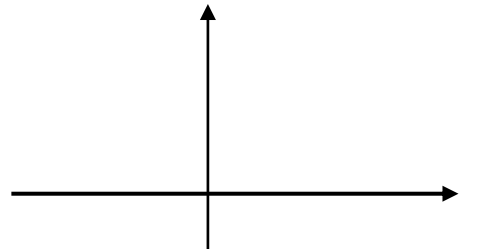
إذا أعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام ولم تعط  
أي مركبات اتجاهية إضافية  
فإنها زاوية اتجاه حقيقي

تحقق من فهمك: ص 219-



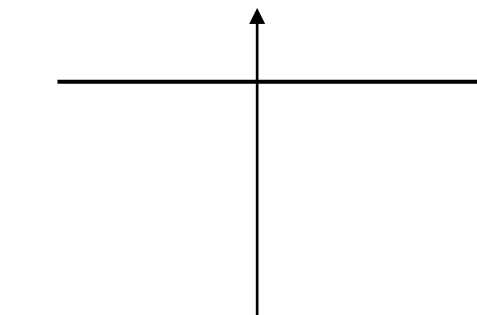
استعمل مسطرة ومنقلة لرسم متجه لكل من الكميات الآتية . واكتب مقياس الرسم في كل حالة

$t = 20 \text{ ft/s}$  (2A) ، باتجاه  $065^\circ$ .



.....  
.....

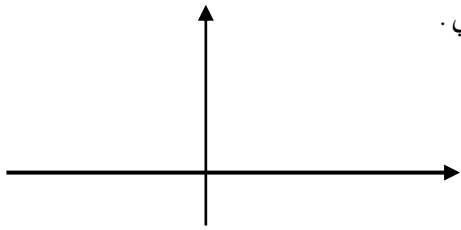
$u = 15 \text{ mi/h}$  (2B) ، باتجاه  $S25^\circ E$ .



.....  
.....

(2c)  $m = 60N$  ، بزاوية قياسها:  $80^\circ$  مع الاتجاه الأفقي .

.....



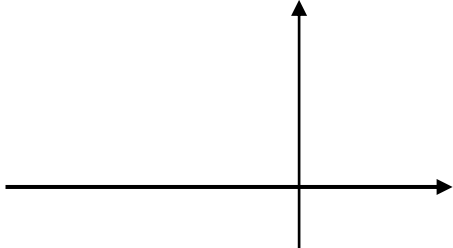
تدرب: ص 91-



(8)  $g = 6 \text{ km/h}$  ، باتجاه:  $N70^\circ W$

.....

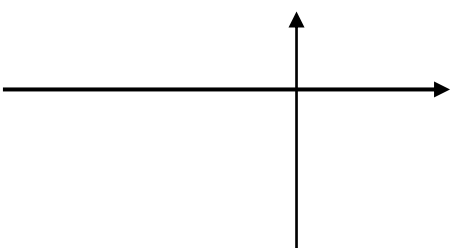
.....



(9)  $j = 5 \text{ ft/s}$  ، بزاوية قياسها:  $300^\circ$  مع الأفقي .

.....

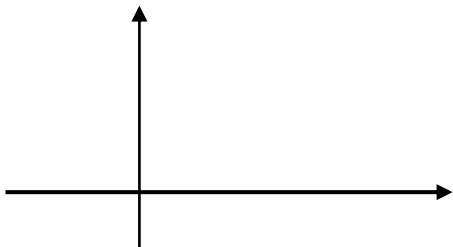
.....



(12)  $n = 32 \text{ m/s}$  ، باتجاه:  $030^\circ$

.....

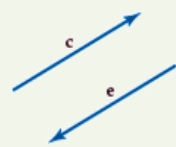
.....



**المتجهات المتعاكسة**

لهما اتجاهين مختلفين

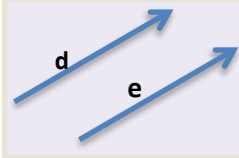
لهما الطول نفسه



**المتجهات المتساوية**

لهما الإتجاه نفسه

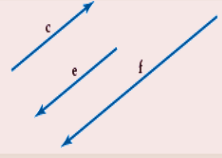
لهما الطول نفسه



**المتجهات المتوازية**

لهما الإتجاه نفسه أو متعاكستان

ليس بالضرورة لهما الطول نفسه



أنواع المتجهات

إيجاد محصلة متجهين:

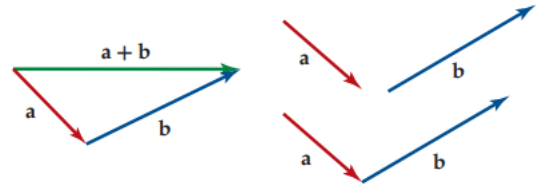
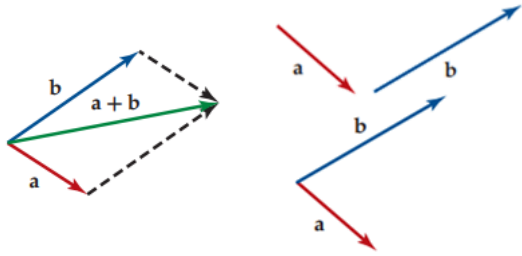
3

قاعدة متوازي الأضلاع

قاعدة المثلث

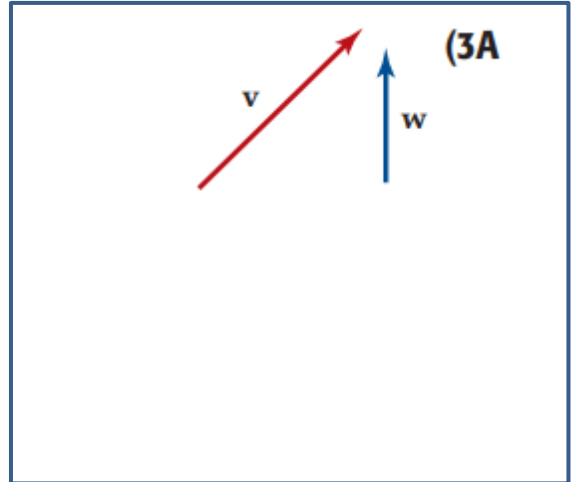
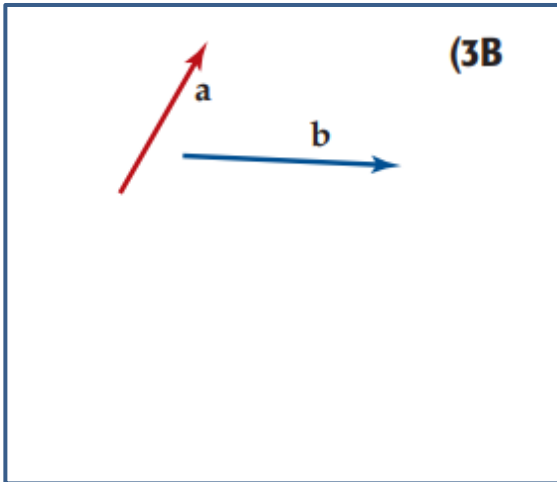
لا بد أن تلتقي بداية المتجه الثاني مع بداية المتجه الأول ومن ثم نكمل رسم متوازي الأضلاع وبالتالي تكون المحصلة هي قطر متوازي الأضلاع

لا بد أن تلتقي بداية المتجه الثاني مع نهاية المتجه الأول وبالتالي تكون بداية المحصلة هي بداية المتجه الأول ونهايتها هي نهاية المتجه الثاني



أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملاً قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع ، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي

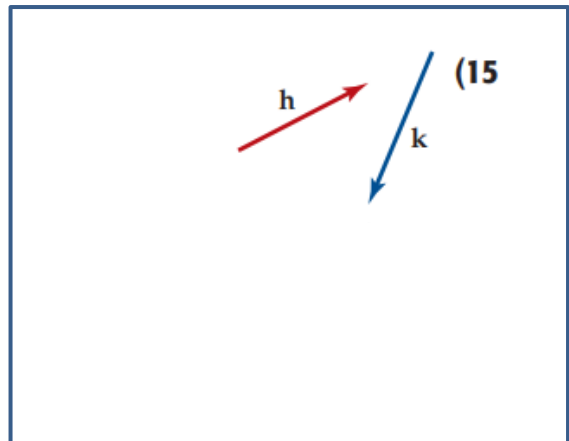
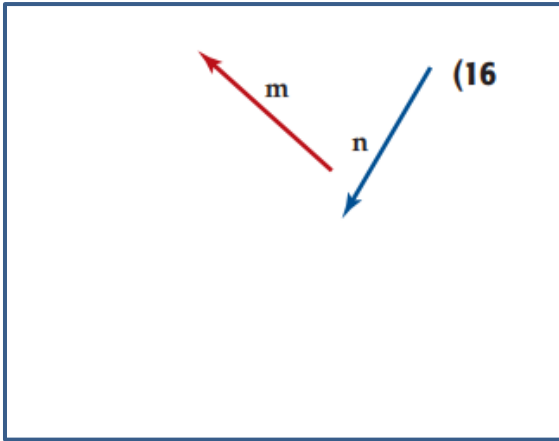
تحقق من فهمك : ص 89-



**3C) لعبة أطفال:** رمى طفل كرة صغيرة في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة  $7 \text{ in/s}$  ، باتجاه  $310^\circ$  ، فارتدت باتجاه  $055^\circ$  ، وبسرعة  $4 \text{ in/s}$  . أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها . (قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة ، والاتجاه إلى أقرب درجة)

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع ،  
ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي

تدرب: ص 91-

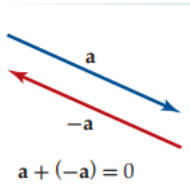


حدد مقدار المحصلة الناتجة من جمع المتجهين واتجاهها في كل مما يأتي:

تدرب: ص 91-



- (18) 18N للأمام ، ثم 20 N للخلف .....
- (19) 100 m للشمال ، ثم 350 m للجنوب .....
- (20) 17 mi شرقا ، ثم 16 mi جنوبا .....
- (21)  $15m/s^2$  باتجاه زاوية قياسها  $60^\circ$  مع الأفقي ، ثم  $9.8 m/s^2$  إلى الأسفل .....



عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه فإن  
المحصلة هي المتجه الصفري يرمز له بالرمز  $\vec{0}$  أو 0، وليس  
له اتجاه



العمليات على المتجهات

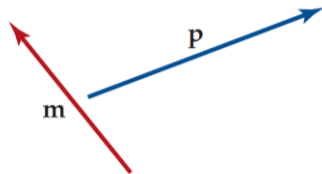
4

ارسم المتجه الذي يمثل كلا مما يأتي:

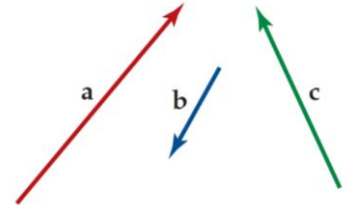
تحقق من فهمك : ص 89-



$m - \frac{1}{4}p$  (4B)



$a - c + 2b$  (4A)



استعمل المتجهات الآتية لرسم المتجه الذي يمثل :

تدرب: ص 91-



$m - 2n$  (22)

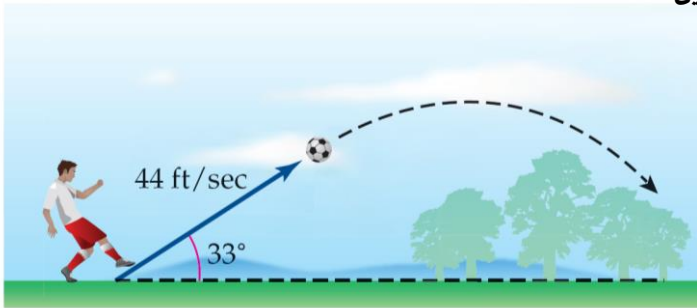


5 تحليل القوى إلى مركبتين متعامدتين

تحقق من فهمك : ص 90-



5 - A) ارسم شكلاً يوضح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.



الرأسية

الأفقية

B) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة..

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

تدرب: ص 92-



29 تنظيف: يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها  $190N$  ، وبزاوية قياسها  $33^\circ$  مع سطح الرض كما في الشكل .



الرأسية

الأفقية

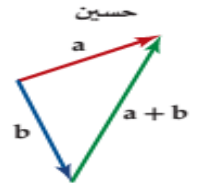
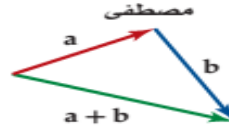
A) ارسم شكلاً يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبتين المتعامدتين.

B) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة..

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

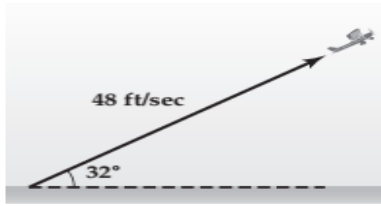
مهارات التفكير العليا: ص 93-

43) اكتشف الخطأ: حاول كل من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين  $a, b$ ، أيهما كانت إجابته صحيحة برر إجابتك.



تدرب على الاختبار: ص 93-

56) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بعد بزاوية قياسها  $32^\circ$  مع الأفقي، وبسرعة  $48 \text{ ft/s}$  كما في الشكل، أي مما يأتي يمثل مفدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة على الترتيب؟



- (A)  $25.4 \text{ ft/s}$  ,  $40.7 \text{ ft/s}$
- (B)  $40.7 \text{ ft/s}$  ,  $25.4 \text{ ft/s}$
- (C)  $56.6 \text{ ft/s}$  ,  $90.6 \text{ ft/s}$
- (D)  $90.6 \text{ ft/s}$  ,  $56.6 \text{ ft/s}$

الواجب:

## تحصيلي رياضيات

/1 أي الكميات التالية كمية متجهة؟

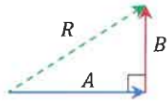
- (A) الزمن (B) المسافة (C) الإزاحة (D) الكتلة

 /2 إذا كان المتجه  $a = \langle 3, 5 \rangle$  يوازي المتجه  $b$  وعكس اتجاهه، فإن  $b$  يساوي ....

- (A)  $\langle -3, -5 \rangle$  (B)  $\langle 0, 3 \rangle$  (C)  $\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \rangle$  (D)  $\langle 6, 10 \rangle$

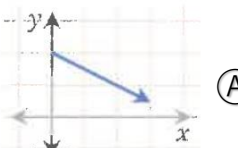
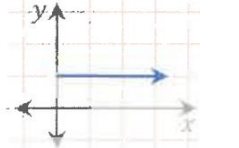
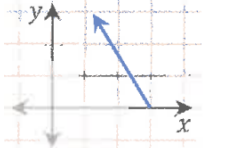
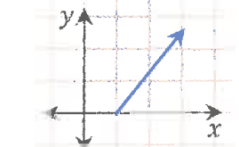
 /3 إذا كان الشكل يمثل المتجهين  $x, y$  فأی التالي يمثل

- (A)  (B)  (C)  (D) 

 /4 في الشكل المجاور إذا كانت قيمة المتجه  $A$  تساوي 8 ، وقيمة المتجه  $B$  تساوي 6 ، فما قيمة متجه المحصلة؟


- (A) 2 (B) 14 (C) 10 (D) 16

/5 أي المتجهات التالية له مركبة أفقية أكبر؟

- (A)  (B)  (C)  (D) 

 /6 تسير باخرة بزاوية قيمتها  $60^\circ$  مع الأفقي وبسرعة  $100 \text{ km/h}$  ، ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الباخرة؟

- (A)  $50 \text{ km/h}$  (B)  $50\sqrt{3} \text{ km/h}$  (C)  $200 \text{ km/h}$  (D)  $200\sqrt{3} \text{ km/h}$

 /7 إذا كان قياس زاوية الاتجاه الحقيقي لمتجه  $155^\circ$  فإن اتجاهه الربعي هو...

- (A)  $N55^\circ E$  (B)  $S25^\circ E$  (C)  $W55^\circ S$  (D)  $N35^\circ E$

 /8 المركبة الرأسية لمتجه طوله  $5 \text{ in}$  ، وقياس زاوية اتجاهه  $32^\circ$ 

- (A)  $4.24 \text{ in}$  (B)  $2.65 \text{ in}$  (C)  $2.79 \text{ in}$  (D)  $31.88 \text{ in}$

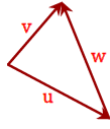
 /9 إذا كان اتجاه متجه  $180^\circ$  فإن قياس زاوية اتجاهه الحقيقي....

- (A)  $90^\circ$  (B)  $180^\circ$  (C)  $270^\circ$  (D)  $300^\circ$



## تصيلي رياضيات

/10 المتجه الذي يمثل محصلة المتجهين الآخرين في الشكل هو:....


 (D)  $W + V$ 

 (C)  $W$ 

 (B)  $u$ 

 (A)  $V$ 

 /11 إذا كان اتجاه متجه  $120^\circ$  فإن قياس زاوية اتجاهه الربيعي ....

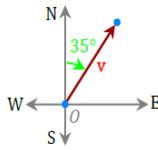
 (D)  $N 60^\circ E$ 

 (C)  $N 60^\circ W$ 

 (B)  $N 30^\circ E$ 

 (A)  $N 30^\circ W$ 

/12 زاوية الاتجاه الربيعي للمتجه في الشكل

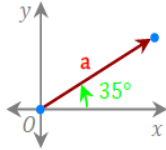

 (D)  $N 35^\circ W$ 

 (C)  $W 55^\circ S$ 

 (B)  $N 55^\circ E$ 

 (A)  $N 35^\circ E$ 

/13 قياس زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه في الشكل

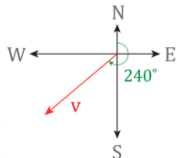

 (D)  $090^\circ$ 

 (C)  $055^\circ$ 

 (B)  $035^\circ$ 

 (A)  $35^\circ$ 

/14 في الشكل زاوية الاتجاه الربيعي للمتجه هو:


 (D)  $S 240^\circ W$ 

 (C)  $W 60^\circ S$ 

 (B)  $E 60^\circ S$ 

 (A)  $S 60^\circ W$ 

 /15 يتحرك خالد بسرعة  $3 \text{ km/h}$  باتجاه مسجد الحي فيقطع مسافة  $550 \text{ m}$  جنوبا ثم يواصل المشي  $200 \text{ m}$  شرقا فيصل إلى المسجد بعد  $15$  دقيقة ما الكمية القياسية؟

 (D)  $15$  دقيقة

 (C)  $550 \text{ m}$  جنوبا

 (B)  $3 \text{ km/h}$  باتجاه المسجد

 (A)  $200 \text{ m}$  شرقا

/16 عند تحليل المتجه إلى مركبتيه ، فإن مقدار المتجه الأساسي يساوي

(D) متوسط قيمة مركبتيه

(C) حاصل ضرب مركبتيه

(B) تزيد قيمة مركبتيه

(A) قسمة إحدى مركبتيه

## التعبير عن المتجه في الصورة الاحداثية:

1



الصورة الاحداثية لـ  $\overrightarrow{AB}$  ، الذي نقطة بدايته  $A(x_1, y_1)$  ، ونقطة نهايته  $B(x_2, y_2)$  ، هي:  $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

أوجد الصورة الإحداثية لـ  $\overrightarrow{AB}$  المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يلي:

تحقق من فهمك: ص 94-



$A(0, 8), B(-9, -3)$  (1B)

$A(-2, -7), B(6, 1)$  (1A)

## إيجاد طول المتجه:

2



إذا كان  $v$  متجهًا نقطة بدايته  $(x_1, y_1)$  ، ونقطة نهايته  $(x_2, y_2)$  ، فإن طول  $v$  هو:

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت  $\langle a, b \rangle$  الصورة الاحداثية للمتجه  $v$  فإن:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

أوجد طول  $\overrightarrow{AB}$  المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يلي:

تحقق من فهمك: ص 95-



$A(0, 8), B(-9, -3)$  (2B)

$A(-2, -7), B(6, 1)$  (2A)

أوجد الصورة الإحداثية وطول  $\overrightarrow{AB}$  المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يلي:

تدرب: ص 99-



$A(2, -7), B(-6, 9)$  (2)

$A(-3, 1), B(4, 5)$  (1)



أوجد كلاما يأتي للمتجهات:  $a = \langle 2, 5 \rangle$ ,  $b = \langle -3, 0 \rangle$ ,  $c = \langle -4, 1 \rangle$ :

$$-3c \quad (3B)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

$$4c + b \quad (3A)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

$$2c + 4a - b \quad (3C)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

تدرب: ص 99-



إذا كان:  $f = \langle 8, 0 \rangle$ ,  $g = \langle -3, -5 \rangle$ ,  $h = \langle -6, 2 \rangle$  فأوجد:

$$2f + g - 3h \quad (9)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

$$4g - 3f + h \quad (12)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

إيجاد متجه وحده له نفس الاتجاه لمتجه معطى:

4

أوجد متجه الوحده الذي له نفس اتجاه المتجه المعطى في كل مما يأتي:

تحقق من فهمك: ص 96-



$$x = \langle -4, -8 \rangle (4B)$$

$$w = \langle 6, -2 \rangle (4A)$$

أوجد متجه الوحده الذي له نفس اتجاه المتجه المعطى في كل مما يأتي:

تدرب: ص 99-



$$v = \langle -2, 7 \rangle (13)$$

كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة:

5

يمكن استعمال المتجهين:  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  للتعبير عن أي متجه  $\langle a, b \rangle$  على الصورة  $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$  وتسمى الصورة  $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$  توافقاً خطياً للمتجهين  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$



برمز لمتجهي الوحدة بالرمزين:  
 $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$  على الترتيب  
 كما يسمى المتجهان  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  متجهي الوحدة القياسيين

تحقق من فهمك: ص 97-


 اكتب المتجه  $\overrightarrow{DE}$  المعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  في كل مما يلي:

$$D(-3, -8), E(7, 1) (5B)$$

$$D(-6, 0), E(2, 5) (5A)$$

تدرّب: ص 99-


 اكتب المتجه  $\overrightarrow{DE}$  المعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة  $\mathbf{j}$  ,  $\mathbf{i}$  في كل مما يلي:

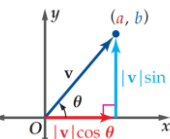
$$D(4, -1), E(5, -7) \quad (19)$$

إيجاد الصورة الإحداثية:

6



$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \langle a, b \rangle \\ &= |\mathbf{v}|(\cos \theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}|(\sin \theta)\mathbf{j} \end{aligned}$$



تحقق من فهمك: ص 97-


 أوجد الصورة الإحداثية للمتجه  $\mathbf{V}$  المعطى طولُه وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كل مما يلي:

$$|\mathbf{V}| = 24, \theta = 210^\circ \quad (6B)$$

$$|\mathbf{V}| = 8, \theta = 45^\circ \quad (6A)$$

تدرّب: ص 100-



$$|\mathbf{V}| = 4, \theta = 135^\circ \quad (27)$$

$$|\mathbf{V}| = 12, \theta = 60^\circ \quad (25)$$

لكل قيمة لـ  $\tan \theta$  توجد زاويتان مختلفتان بناء على العلاقة:  
 $\tan \theta = \tan(\theta + 180)$



لإيجاد زاوية اتجاه المتجه  $V = \langle a, b \rangle$  مع الاتجاه الأفقي الموجب نحل المعادلة:

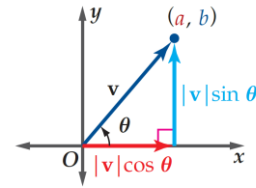
$$V = \langle a, b \rangle$$

أو

$$\tan \theta = \frac{|V| \sin \theta}{|V| \cos \theta}$$

إذا كانت قيمة  $\tan \theta$  سالبة فإن  $\theta$  تقع في الربع الثاني أو الرابع

إذا كانت قيمة  $\tan \theta$  موجبة فإن  $\theta$  تقع في الربع الأول أو الثالث



تحقق من فهمك: ص 98-



أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهين الآتين مع الاتجاه الموجب لمحور x:

$$\langle -3, -8 \rangle (7B)$$

$$-6i + 2j (7A)$$

تدرب: ص 100-



$$\langle -5, 9 \rangle (32)$$

$$3i + 6j (29)$$



8) كرة قدم : يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة  $7m/s$  ليرمى الكرة بسرعة  $25 m/s$  ، بزاوية  $40^\circ$  مع الأفقي ،  
أوجد محصلة السرعة

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



33) ملاحه جوية : تطير طائرة جهة الشرق بسرعة مقدارها  $600 mi/h$  وتهب الرياح بسرعة مقدارها  $85mi/h$  ،  
باتجاه  $S 59^\circ E$  ،

(a) أوجد محصلة سرعة الطائرة .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

43) تبرير: إذا كان  $a, b$  متجهين متوازيين فعبر عن كل من المتجهين بالصورة الإحداثية مبينا العلاقة بين  $a, b$

.....

.....

.....

.....

.....

تدرب على الاختبار: ص 101 -

55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته  $(5, 2)$  ، ونقطة نهايته  $(-3, -4)$  ؟

$\sqrt{82}$  C                       $\sqrt{2}$  A

$\sqrt{106}$  D                       $\sqrt{26}$  B

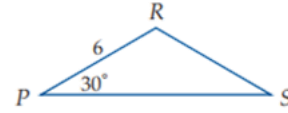
.....

.....

.....

.....

56) ما مساحة المثلث المجاور، إذا علمت أن  $PR = RS$  ؟



$18\sqrt{2}$  C                       $9\sqrt{2}$  A

$18\sqrt{3}$  D                       $9\sqrt{3}$  B

.....

.....

.....

.....

الواجب:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## تصيلي رياضيات

 1/ ما الصورة الإحداثية لـ  $\overline{AB}$  ، حيث  $A(-4, 1)$  ،  $B(2, -5)$  ؟

- A  $\langle -8, -5 \rangle$      B  $\langle -4, 1 \rangle$      C  $\langle 6, -6 \rangle$      D  $\langle 2, -5 \rangle$

 2/ طول المتجه  $C = \langle 0, 6 \rangle$  يساوي ....

- A 8     B 6     C 4     D 2

3/ أي المتجهات التالية طوله 6 وحدات؟

- A  $\langle 2, 4 \rangle$      B  $\langle \sqrt{5}, 1 \rangle$      C  $\langle 3\sqrt{3}, 3 \rangle$      D  $\langle 2, \sqrt{3} \rangle$

 4/ إذا كان لدينا المتجهين  $A = \langle 5, -3 \rangle$  ،  $B = \langle 1, 4 \rangle$  ، فأوجد  $2A - B$ 

- A  $\langle 9, -10 \rangle$      B  $\langle 6, 1 \rangle$      C  $\langle 4, -7 \rangle$      D  $\langle -3, 11 \rangle$

 5/ إذا كان  $A = \langle 3, 4 \rangle$  ،  $B = \langle 2, -1 \rangle$  فأوجد  $3A - B$ 

- A  $\langle 7, 13 \rangle$      B  $\langle 1, 5 \rangle$      C  $\langle 11, 13 \rangle$      D  $\langle 7, 3 \rangle$

 6/ إذا كان  $A = \langle 1, 2 \rangle$  ،  $C = \langle 4, 0 \rangle$  ،  $B = \langle -3, 5 \rangle$  ، فأوجد  $C - 2A + B$ 

- A  $\langle 1, -1 \rangle$      B  $\langle -1, 1 \rangle$      C  $\langle 0, -14 \rangle$      D  $\langle -14, 0 \rangle$

 7/ ما متجه الوحده  $u$  الذي له نفس اتجاه المتجه  $v = \langle 4, 3 \rangle$  ؟

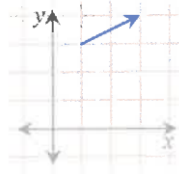
- A  $\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$      B  $\langle \frac{5}{4}, \frac{5}{4} \rangle$      C  $\langle 2, 2 \rangle$      D  $\langle 4, 3 \rangle$

 8/ المتجه:  $v = 5i - 2j$  بالصورة الإحداثية يساوي ....

- A  $\langle 5, 2 \rangle$      B  $\langle 2, 5 \rangle$      C  $\langle 5, -2 \rangle$      D  $\langle -2, 5 \rangle$

## تحصيلي رياضيات

/9 أي التالي يعبر عن المتجه الممثل في الشكل ؟



- (A)  $3i + j$       (B)  $-3i + j$       (C)  $2i + j$       (D)  $-2i + 2j$

 /10 الصورة الإحداثية لمتجه  $v$  طوله 14 وزاوية اتجاهه مع الأفقي  $210^\circ$ 

- (A)  $\langle 7, 7\sqrt{3} \rangle$       (B)  $\langle -7\sqrt{3}, -7 \rangle$       (C)  $\langle -7\sqrt{3}, 7 \rangle$       (D)  $\langle 14, 210 \rangle$

 /11 ما الصورة الإحداثية لمتجه طوله 6 وزاوية اتجاهه مع الأفقي  $150^\circ$  ؟

- (A)  $\langle -3\sqrt{3}, 3 \rangle$       (B)  $\langle 3, -3\sqrt{3} \rangle$       (C)  $\langle 3, 3\sqrt{3} \rangle$       (D)  $\langle 3\sqrt{3}, -3 \rangle$

 /12 أي المتجهات التالية طوله  $2\sqrt{2}$  وزاوية اتجاهه  $150^\circ$  ؟

- (A)  $\langle 2, -2 \rangle$       (B)  $\langle -2, 2 \rangle$       (C)  $i + j$       (D)  $2i + 2j$

 /13 ما الصورة الإحداثية لـ  $\overline{AB}$  ، حيث  $A(5, 3)$  ،  $B(6, -9)$  ؟

- (A)  $\langle 11, -6 \rangle$       (B)  $\langle 1, -12 \rangle$       (C)  $\langle -1, 12 \rangle$       (D)  $\langle 30, 27 \rangle$

 /14 إذا كان  $u = \langle -1, 4 \rangle$  ،  $u + v = \langle 4, 5 \rangle$  ، فإن  $v$  يساوي .....

- (A)  $\langle 3, 9 \rangle$       (B)  $\langle 5, 1 \rangle$       (C)  $\langle -5, -1 \rangle$       (D)  $\langle 3, 1 \rangle$

 /15 إذا كان  $-\frac{1}{2}v = \langle -4, 12 \rangle$  فإن  $v$  يساوي .....

- (A)  $\langle 2, -6 \rangle$       (B)  $\langle -2, 6 \rangle$       (C)  $\langle -8, 24 \rangle$       (D)  $\langle 8, -24 \rangle$

 /16 المتجه  $V = \langle 2, 3 \rangle$  ، بدلالة متجهي الوحدة القياسيين يساوي ....

- (A)  $2i + 3j$       (B)  $2i - 3j$       (C)  $5i + j$       (D)  $i + j$

يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي



يكون المتجهان غير الصفرين  $a, b$  متعامدين إذا فقط إذا كان:  
 $a \cdot b = 0$

يعرف الضرب الداخلي للمتجهين  $a = \langle a_1, a_2 \rangle, b = \langle b_1, b_2 \rangle$  كالآتي:  
 $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$

1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين:

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين:

تحقق من فهمك: ص 102-



$$u = \langle -2, -3 \rangle, v = \langle 9, -6 \rangle \text{ (1B)}$$

$$u = \langle 3, -2 \rangle, v = \langle -5, 1 \rangle \text{ (1A)}$$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين:

تدرب: ص 106-



$$u = 11i + 7j, v = 7i + 11j \text{ (4)}$$

$$u = \langle 9, -3 \rangle, v = \langle 1, 3 \rangle \text{ (2)}$$

$$u = \langle 3, -5 \rangle, v = \langle 6, 2 \rangle \text{ (1)}$$

1 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه:

استعمل الضرب الداخلي، لإيجاد طول كل من المتجهات الآتية:

تحقق من فهمك: ص 103-



$$c = \langle -1, -7 \rangle \text{ (2B)}$$

$$b = \langle 12, 16 \rangle \text{ (2A)}$$

استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول كل من المتجهات الآتية :

تدرّب: ص 106-



$$r = \langle -9, -4 \rangle \text{ (8)}$$

$$m = \langle -3, 11 \rangle \text{ (7)}$$

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين:

3


 يكون المتجهان  
متوازيان

 يكون المتجهان  
متعامدان

 إذا كانت  $\theta$  زاوية بين متجهين غير صفريين  
فإن:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

 إذا كانت الزاوية بينهما  $0^\circ$  أو  $180^\circ$ 

 إذا كانت الزاوية بينهما  $90^\circ$ 

 أوجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $v, u$  في كل مما يأتي:

تحقق من فهمك: ص 105-



$$u = \langle 9, 5 \rangle, v = \langle -6, 7 \rangle \text{ (3B)}$$

$$u = \langle -5, -2 \rangle, v = \langle 4, 4 \rangle \text{ (3A)}$$

تدرّب: ص 106 -


 أوجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $v, u$  في كل مما يأتي وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

$$u = -2i + 3j, v = -4i - 2j \quad (14)$$

$$u = \langle 0, -5 \rangle, v = \langle 1, -4 \rangle \quad (11)$$

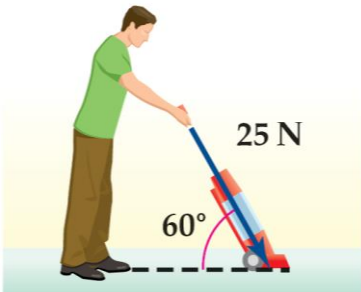
حساب الشغل:

4

تحقق من فهمك: ص 105 -



4) تنظيف: يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة و سطح الأرض  $60^\circ$ ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6m ؟



تدرّب: ص 106 -



16) فيزياء: يدفع طارق برميلا على أرض مستوية مسافة 1.5 m بقوة مقدارها 534N، بزاوية  $25^\circ$ ، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي بذله طارق وقرب الناتج إلى أقرب عدد صحيح.



مهارات التفكير العليا: ص 107 -

33) اكتشف الخطأ: يدرس كل من فهد وفيصل خصائص الضرب الداخلي للمتجهات فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية، لأنها إبدالية، أي أن:  $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$  ولكن فيصل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضح اجابتك؟

تدرب على الاختبار: ص 107 -

45) ما قياس الزاوية بين المتجهين  $\langle -1, -1 \rangle$ ,  $\langle -9, 0 \rangle$ ؟

0° A      90° C

45° B      135° D

46) إذا كان:  $t = \langle -6, 2 \rangle$ ,  $s = \langle 4, -3 \rangle$ ، فأَي مما يأتي يمثل  $r$ ، حيث  $r = t - 2s$ ؟

$\langle 14, 8 \rangle$  A       $\langle -14, 8 \rangle$  C

$\langle 14, 6 \rangle$  B       $\langle -14, -8 \rangle$  D

الواجب:

## تحصيلي رياضيات

/1 إذا كان حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يساوي صفر فإن الزاوية بينهما تكون ....

- (A) حادة      (B) قائمة      (C) منفرجة      (D) مستقيمة

 /2 إذا كان  $u = \langle -3, 6 \rangle$ ,  $v = \langle 2, -5 \rangle$ ,  $w = \langle 8, 4 \rangle$ ,  $c = \langle -2, 7 \rangle$  فإن المتجهين المتعامدين هما ....

- (A)  $v, u$       (B)  $v, w$       (C)  $w, u$       (D)  $v, c$

 /3 ما قيمة  $a$  التي تجعل المتجهين  $u = ai + 2j$ ,  $v = 3i + 6j$  متعامدين؟

- (A) -4      (B) -3      (C) 3      (D) 4

 /4 إذا كان المتجهان  $u = \langle 1, -2 \rangle$ ,  $v = \langle 3, k \rangle$  متعامدان، فما قيمة  $k$ ؟

- (A) -2      (B)  $-\frac{3}{2}$       (C)  $\frac{3}{2}$       (D) 2

 /5 ما قياس الزاوية بين المتجهين  $\langle 2, 0 \rangle$ ,  $\langle 3, 3 \rangle$ ؟

- (A)  $30^\circ$       (B)  $45^\circ$       (C)  $120^\circ$       (D)  $135^\circ$

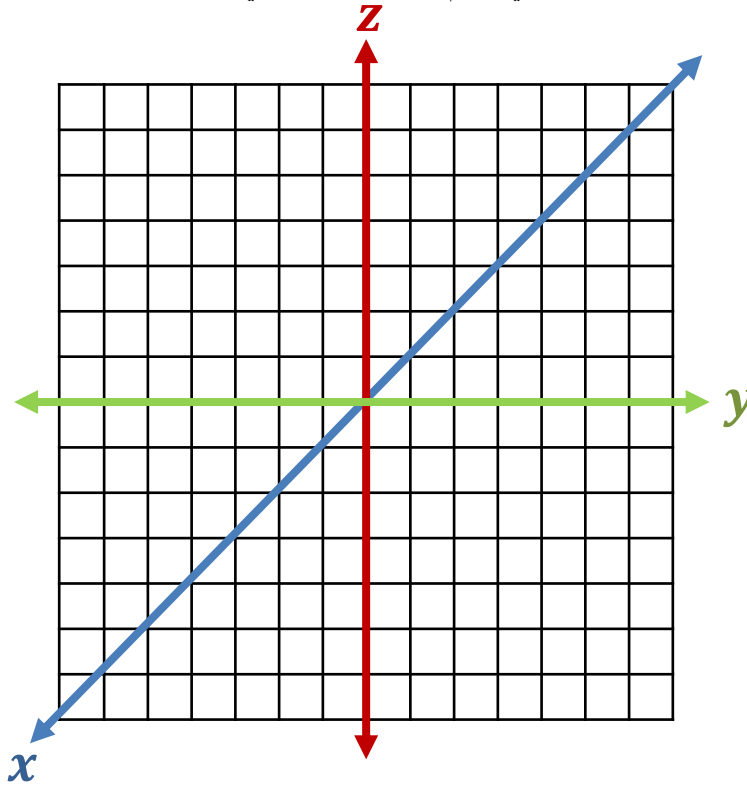
 /6 إذا كان  $u = \langle \sqrt{3}, 1 \rangle$ ,  $v = \langle 0, 4 \rangle$  فما قياس الزاوية بين المتجهين  $u, v$ ؟

- (A)  $30^\circ$       (B)  $60^\circ$       (C)  $120^\circ$       (D)  $240^\circ$

1 تعيين نقطة في الفضاء

عين كلامن النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

تحقق من فهمك : ص 109 -



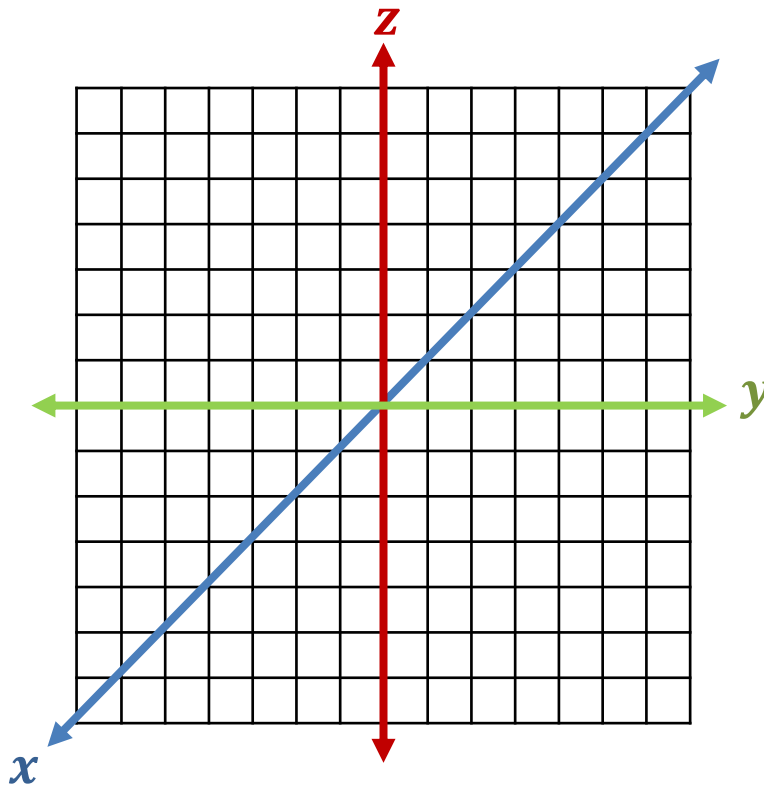
(1A)  $(-3, -4, 2)$

(1B)  $(3, 2, -3)$

(1C)  $(5, -4, -1)$

عين كلامن النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

تدرب: ص 113 -



(1)  $(1, -2, -4)$

(2)  $(3, 2, 1)$

(3)  $(-5, -4, -2)$



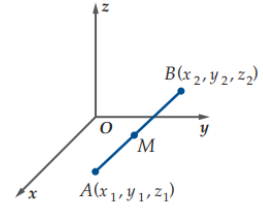
## المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء 2



المسافة بين النقطتين:  $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

نقطة المنتصف  $M$   $\perp \overline{AB}$ :  $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$



تحقق من فهمك: ص 110 -



2) طائرات: تفرض أنظمة السلامة ألا تقل المسافة بين الطائرات عن  $0.5mi$  في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظة معينة كانت إحداثيات موقعي الطائرتين:  $(450, -250, 28000)$ ،  $(300, 150, 30000)$ ، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:  
 (A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

الميل = 5280 قدما

(B) إذا أطلقت ألعاب نارية، وأنفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟



أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كل مما يلي:

تدرب: ص 113 -



(8)  $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

(7)  $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$

متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

المتجه الصفري

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

 إذا كان  $\mathbf{v}$  متجهًا في الفضاء في وضع قياسي،

 وكانت نقطة نهايته  $(v_1, v_2, v_3)$ 

فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية:

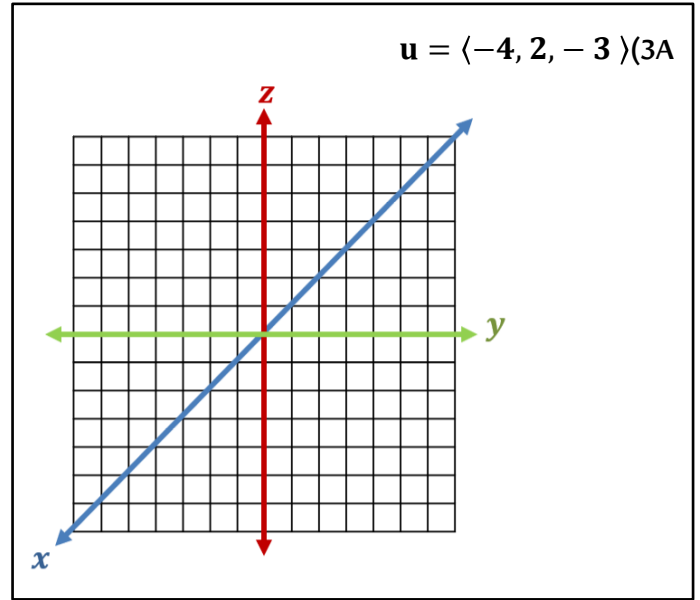
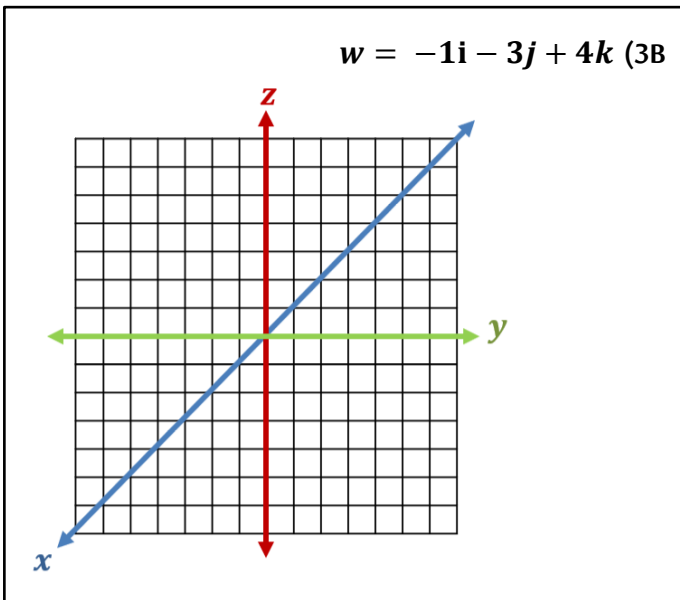
$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$


 يمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه  $\mathbf{v}$  على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  كما يأتي

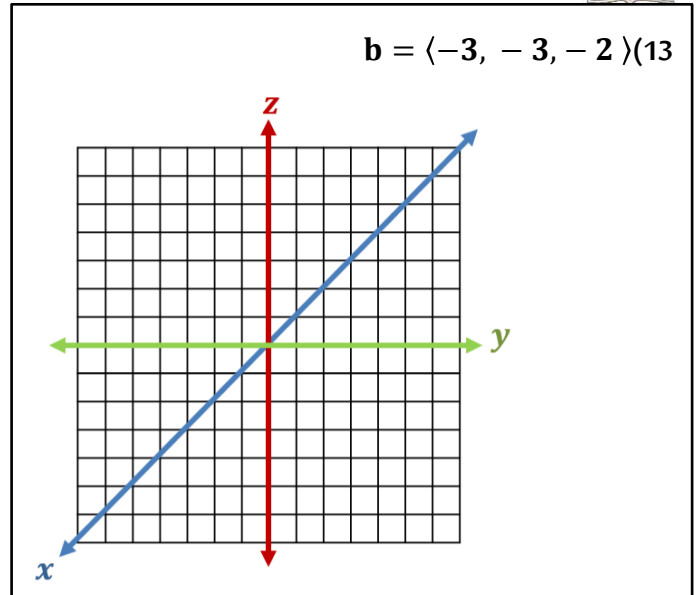
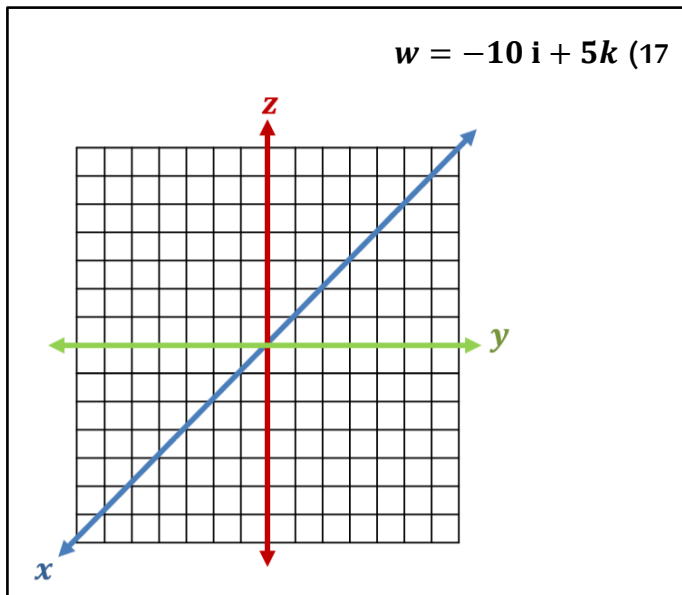
$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$

مثل بيانها كلاً من المتجهين الآتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

تحقق من فهمك: ص 111-



تدرّب: ص 113-



تحقق من فهمك : ص 112-


 أوجد كلاما يأتي للمتجهات  $z = \langle -2, 0, 5 \rangle, w = \langle -1, 4, -4 \rangle, y = \langle 3, -6, 2 \rangle$ 

$$4w - 8z \quad (4A)$$

$$3y + 3z - 6w \quad (4B)$$

تدريب: ص 113-


 أوجد كلاما يأتي للمتجهات:  $a = \langle -5, -4, 3 \rangle, c = \langle -2, 2, 4 \rangle, b = \langle 6, -2, -7 \rangle$ 

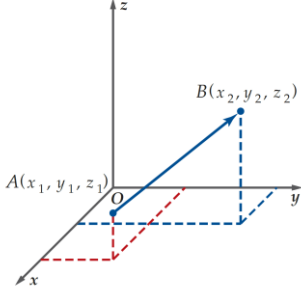
$$7a - 5b \quad (21)$$

$$2a + 5b - 9c \quad (22)$$

## 5 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريا



الصورة الاحداثية لـ  $\vec{AB}$  ، الذي نقطة بدايته  $A(x_1, y_1, z_1)$  ، ونقطة نهايته  $B(x_2, y_2, z_2)$  هي:  $\vec{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$



إذا كان  $\vec{AB}$  متجها نقطة بدايته  $(x_1, y_1, z_1)$  ، ونقطة نهايته  $(x_2, y_2, z_2)$  ، فإن طول  $\vec{AB}$  هو:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

إذا كان  $\vec{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  فإن:  $|\vec{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

ويكون متجه الوحدة  $u$  باتجاه  $\vec{AB}$  هو  $u = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$

تحقق من فهمك : ص 112 -



أوجد الصورة الإحداثية ، وطول  $\vec{AB}$  المعطاه نقطتا بدايته ونهايته ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه  $\vec{AB}$  في كل مما يأتي:

A (-2 , - 5 , - 5), B (-1,4 , - 2) (5A)

A (-1 , 4 , 6), B (3 ,3 ,8) (5B)

تدرب: ص 113 -



أوجد الصورة الإحداثية ، وطول  $\overline{AB}$  المعطاه نقطتا بدايته ونهايته ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه  $\overline{AB}$  في كل مما يأتي:

(32)  $A (-5, -5, -9), B (11, -3, -1)$

مهارات التفكير العليا: ص 114 -

(53) **تحذ:** إذا كانت  $M$  هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين :  $M_1(-1,2, -5), M_2(3,8, -1)$  ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة الميترقيمة  $M_1M$ .

تدرب على الاختبار: ص 114 -

(61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط :  $A(0, 3, 5), B(1, 0, 2), C(0, -3, 5)$  ؟

(A) قائم الزاوية

(B) متطابق الضلعين

(C) متطابق الأضلاع

(D) مختلف الأضلاع

الواجب:

## تحصيلي رياضيات

 /1 أي التالي يمثل  $\overline{AB}$  إذا كان:  $A(3, 4, -4)$ ,  $B(-5, 2, 1)$  ؟

- (A)  $\langle -8, -2, 5 \rangle$       (B)  $\langle 8, -2, 3 \rangle$       (C)  $\langle 8, 2, -3 \rangle$       (D)  $\langle -8, -2, -3 \rangle$

 /2 إذا كان:  $A(-5, 0, 2)$ ,  $B(3, 6, 2)$  فإن متجه الوحدة الذي له اتجاه  $\overline{AB}$  هو....

- (A)  $\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \rangle$       (B)  $\langle 2, \frac{3}{2}, 0 \rangle$       (C)  $\langle -1, 3, 2 \rangle$       (D)  $\langle \frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, 0 \rangle$

 /3 إذا كان  $a = \langle 2, 4, -3 \rangle$ ,  $b = \langle -5, -7, 1 \rangle$  فإن  $2a - b$  تساوي ....

- (A)  $\langle -1, 1, 5 \rangle$       (B)  $\langle 4, 8, -6 \rangle$       (C)  $\langle 9, 15, -7 \rangle$       (D)  $\langle 9, 15, -5 \rangle$

 /4 طول المتجه  $w = 5i + 3j - \sqrt{2}k$  يساوي ....

- (A)  $8 - \sqrt{2}$       (B) 6      (C)  $8 + \sqrt{2}$       (D)  $4\sqrt{2}$

 /5 متجه الوحدة في اتجاه المتجه  $v = \langle 2, -3, 6 \rangle$  يساوي....

- (A)  $\langle 1, 1, 1 \rangle$       (B)  $\langle \frac{2\sqrt{31}}{31}, \frac{3\sqrt{31}}{31}, \frac{6\sqrt{31}}{31} \rangle$       (C)  $\langle \frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7} \rangle$       (D)  $\langle \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6} \rangle$

 /6 إذا كانت  $(3, 0, 6)$  نقطة المنتصف بين النقطتين:  $A(2, 3, 4)$ ,  $B(4, -3, k)$  فإن  $k$  تساوي ....

- (A) 2      (B) 6      (C) 8      (D) 12

يكون المتجهان غير الصفرين  
متعامدين  $a, b$   
إذا وفقط إذا كان:  
 $a \cdot b = 0$



يعرف الضرب الداخلي للمتجهين  
 $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$   
في الفضاء كالاتي:  
 $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

### 1 إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$ ، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

تحقق من فهمك: ص 115-



$$u = \langle 4, -2, -3 \rangle, v = \langle 1, 3, -2 \rangle \quad (1B)$$

$$u = \langle 3, -5, 4 \rangle, v = \langle 5, 7, 5 \rangle \quad (1A)$$

تدرب: ص 118-



$$u = 6i - 2j - 5k, v = 3i - 2j + 6k \quad (5)$$

$$u = \langle 3, -9, 6 \rangle, v = \langle -8, 2, 7 \rangle \quad (1)$$

### 2 الزاوية بين متجهين في الفضاء



إذا كانت  $\theta$  زاوية بين متجهين غير صفرين في الفضاء  $a, b$  فإن:  $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$

تحقق من فهمك: ص 115-



(2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين:  $u = -4i + 2j + k, v = 4i + 3k$ ، إلى أقرب منزلة عشرية:

أوجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $u, v$ ، في كل مما يأتي  
وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة

تدرب: ص 118-



$$u = -3i + 2j + 9k, v = 4i + 3j - 10k \quad (11)$$

$$u = \langle 6, -5, 1 \rangle, v = \langle -8, -9, 5 \rangle \quad (8)$$

إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين:

3

إذا كان  $a = a_1i + a_2j + a_3k$ ,  $b = b_1i + b_2j + b_3k$  فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين  $a, b$  هو المتجه

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$



الضرب الاتجاهي للمتجهين  $a, b$  هو متجه **وليس عدد**

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين  $u, v$ ، في كل مما يأتي، ثم بين أن  $u \times v$  يعامد كلا من  $u, v$

تحقق من فهمك: ص 116-



$$u = \langle -2, -1, -3 \rangle, v = \langle 5, 1, 4 \rangle \quad (3B)$$

$$u = \langle 4, 2, -1 \rangle, v = \langle 5, 1, 4 \rangle \quad (3A)$$





أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين  $u, v$ ، في كل مما يأتي، ثم بين أن  $u \times v$  يعامد كلا من  $u, v$

تدرب: ص 118 -

$$u = -2i - 2j + 5k, v = 7i + j - 6k \quad (15)$$

مساحة متوازي أضلاع في الفضاء:

4



لإيجاد مساحة متوازي أضلاع في الفضاء:

✓ نوجد  $u \times v$

✓ نوجد طول  $|u \times v|$

تحقق من فهمك: ص 117 -



4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه:  $u = -6i - 2j + 3k, v = 4i + 3j + k$  ضلعان متجاوران،

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه  $u, v$  ضلعان متجاوران ،

تدرب: ص 118-



$$u = \langle -9, 1, 2 \rangle, v = \langle 6, -5, 3 \rangle \quad (16)$$

الضرب القياسي الثلاثي :

إذا كان:

$$t = t_1i + t_2j + t_3k, \quad u = u_1i + u_2j + u_3k, \quad v = v_1i + v_2j + v_3k$$

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات  $t, u, v$  يعرف كالآتي :



$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

## حجم متوازي السطوح:

5

تحقق من فهمك: ص 117-



5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه :  $t = 2j - 5k$ ,  $u = -6i - 2j + 3k$ ,  $v = 4i + 3j + k$  أحرف متجاورة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تدرب: ص 250-



20) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه :  $t = \langle -1, -9, 2 \rangle$ ,  $u = \langle 4, -7, -5 \rangle$ ,  $v = \langle 3, -2, 6 \rangle$  أحرف متجاورة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(43) تحد: إذا كان  $u = \langle 4, 6, C \rangle$ ,  $v = \langle 3, -2, 5 \rangle$  فأوجد قيمة  $C$  التي تجعل  $u \times v = 34i - 26j + 10k$

.....

.....

.....

.....

.....

تدرب على الاختبار: ص 119 -

(54) أي مما يأتي متجهان متعامدان؟

(A)  $\langle 1, 0, 0 \rangle$ ,  $\langle 1, 2, 3 \rangle$

(B)  $\langle 1, -2, 3 \rangle$ ,  $\langle 2, -4, 6 \rangle$

(C)  $\langle 3, 4, 6 \rangle$ ,  $\langle 6, 4, 3 \rangle$

(D)  $\langle 3, -5, 4 \rangle$ ,  $\langle 6, 2, -2 \rangle$

(55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين:  
 $u = \langle 3, 8, 0 \rangle$ ,  $v = \langle -4, 2, 6 \rangle$  ؟

.....

.....

.....

.....

.....

(55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين:  $u = \langle 3, 8, 0 \rangle$ ,  $v = \langle -4, 2, 6 \rangle$  ؟

(A)  $48i - 18j + 38k$

(B)  $48i - 22j + 38k$

(C)  $46i - 22j + 38k$

(D)  $46i - 18j + 38k$

.....

.....

.....

.....

.....

الواجب:

.....

.....

.....

.....

.....

تصليبي رياضيات

/1 إذا كان:  $u = \langle b, -3, 1 \rangle, v = \langle -2, -1, 3 \rangle$  فما قيمة  $b$  التي تجعل المتجهين  $u, v$  متعامدين؟

- 6 (D)                      3 (C)                      -3 (B)                      -6 (A)

/2 أوجد:  $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

- 2i - j - 4k (D)                      2i - j + 4k (C)                      -2i + j - 4k (B)                      2i + j + 4k (A)

/3 إذا كان:  $u = \langle 1, -2, 0 \rangle, v = \langle 2, 0, -1 \rangle$  متجهين فإن  $u \times v$  يساوي .....

- $\langle 1, -1, -2 \rangle$  (D)                       $\langle -1, 1, 2 \rangle$  (C)                       $\langle 1, 1, -2 \rangle$  (B)                       $\langle -1, -1, 2 \rangle$  (A)

/4 متوازي أضلاع فيه  $u = 7i + 2j - 2k$  و  $v = 4i + 3j + 3k$  ضلعان متجاوران ، ما مساحته بالوحدات المربعة؟

- $\sqrt{458}$  (D)                       $\sqrt{186}$  (C)                      21 (B)                      13 (A)

/5 قياس الزاوية بين المتجهين  $a = \langle \sqrt{2}, 2, 0 \rangle, b = \langle \sqrt{3}, 0, 1 \rangle$  يساوي .....

- $90^\circ$  (D)                       $60^\circ$  (C)                       $45^\circ$  (B)                       $30^\circ$  (A)

/6 أي المتجهات التالية عمودي على المتجهين:  $v = 2i - k$  و  $w = 4i + 3j - k$

- $\langle -3, -6, 6 \rangle$  (D)                       $\langle 3, -2, 6 \rangle$  (C)                       $\langle -3, 6, -6 \rangle$  (B)                       $\langle -3, 2, 6 \rangle$  (A)

انتهى الفصل الدراسي الثاني

